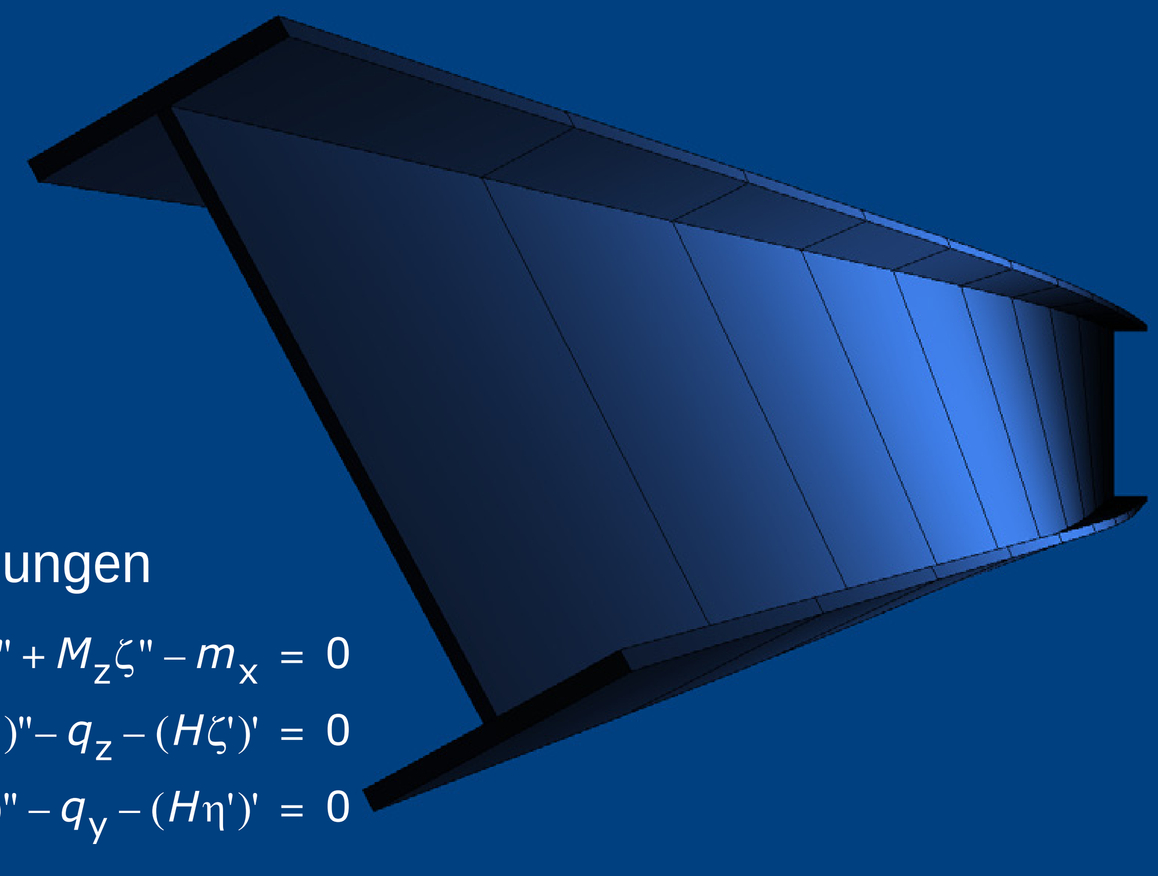
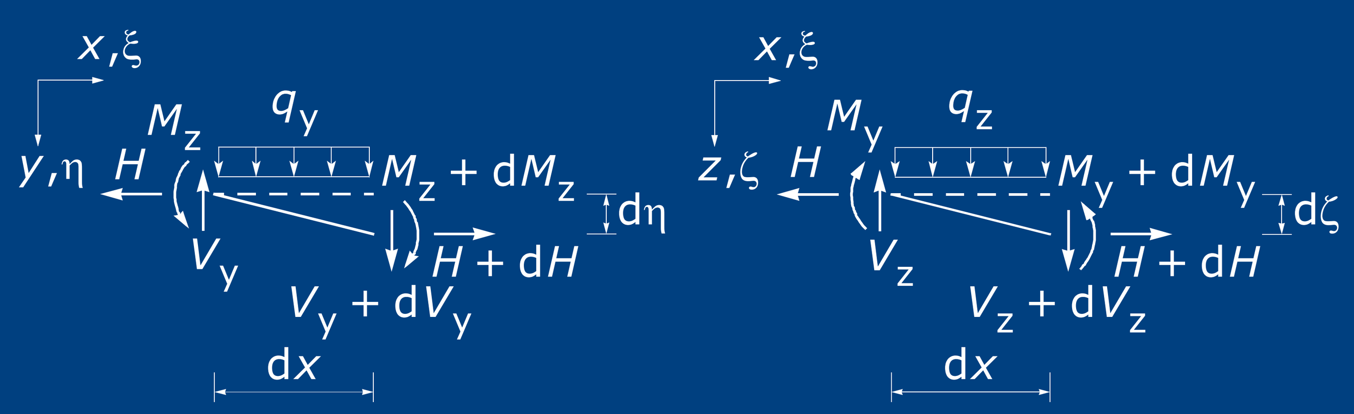
Ansatz geometrischer Ersatzimperfektionen bei der Berechnung von Stahlkonstruktionen nach Biegetorsionstheorie II. Ordnung



Leichte und schlanke Stahlkonstruktionen ermöglichen es, aufgrund ihrer hohen Festigkeit, Bauwerke mit immer größeren Tragweiten zu erschaffen.
Diese dünnwandigen Konstruktionselemente sind jedoch für das Stabilitätsversagen durch Knicken von Stäben und Stabwerken anfällig. Der Einfluß der Verformungen auf das Tragverhalten spielt hierbei eine große Rolle. Um die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung berechnen zu können, werden die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Element aufgestellt. Damit ergeben sich die 3 gekoppelten Differentialgleichungen für die Unbekannten $\vartheta(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$.

Schnittgrößen am verformten infinitesimalen Element



Gekoppelte Differentialgleichungen

$$-GI_T\vartheta'' + EA_{\omega\omega}\vartheta'''' - i_M^2(H\vartheta')' + M_y\eta'' + M_z\zeta'' - m_x = 0$$

$$EA_{zz}\zeta'''' + (M_z\vartheta)'' - q_z - (H\zeta')' = 0$$

$$EA_{yy}\eta'''' + (M_y\vartheta)'' - q_y - (H\eta')' = 0$$

Die Differentialgleichungen entsprechen den Kräftesummen am infinitesimalen Element. Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen können sie numerisch gelöst werden. Nach partieller Integration und Berücksichtigung der Randterme folgt eine integrale Formulierung als Arbeitsgleichung. Durch Auswertung der Terme für kubische Ansätze für die unbekannten Verformungen über Teilbereiche des Systems (Finite Elemente) folgt die Lösung nach Theorie II. Ordnung.

Numerische Lösung mit der Finite Element Methode

Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned}\overline{W} = {} & \int EA_{yy}\eta''\bar{\eta}''dx + \int(M_y\vartheta)\bar{\eta}''dx + \int(H\eta')\bar{\eta}'dx + \int EA_{zz}\zeta''\bar{\zeta}''dx + \int(M_z\vartheta)\bar{\zeta}''dx + \int(H\zeta')\bar{\zeta}'dx + \int GI_T\,\vartheta'\bar{\vartheta}'dx + \int EA_{\omega\omega}\vartheta''\bar{\vartheta}''dx + \int i_M^2 H\vartheta'\bar{\vartheta}'dx + \int M_y\,\eta''\bar{\vartheta}dx + \int M_z\zeta''\bar{\vartheta}dx \\ & + \int c_y\eta\bar{\eta}dx + \int c_z\zeta\bar{\zeta}dx + \int c_x\vartheta\bar{\vartheta}dx - \int q_y(\bar{\eta} - y_p^M\vartheta\bar{\vartheta} - z_p^M\bar{\vartheta})dx - \int q_z(\bar{\zeta} - z_p^M\vartheta\bar{\vartheta} + y_p^M\bar{\vartheta})dx - \int m_x\bar{\vartheta}dx \\ & + \sum C_y\eta\bar{\eta} + \sum C_z\zeta\bar{\zeta} + \sum C_{M_y}\zeta'\bar{\zeta}' + \sum C_{M_z}\eta'\bar{\eta}' + \sum C_{M_x}\vartheta\bar{\vartheta} + \sum C_{M_\omega}\vartheta'\bar{\vartheta}' - \sum F_y(\bar{\eta} - y_p^M\vartheta\bar{\vartheta} - z_p^M\bar{\vartheta}) - \sum F_z(\bar{\zeta} - z_p^M\vartheta\bar{\vartheta} + y_p^M\bar{\vartheta}) - \sum M_x\bar{\vartheta} = 0\end{aligned}$$

Ungünstigen Einfluß auf die Beanspruchung eines Tragwerks haben geometrische (Lastausmittigkeit, Vorverformung) sowie strukturelle (Eigenspannungen, Fließgrenzenstreuung) Imperfektionen. Zur Berücksichtigung dieser Einflüsse können gemäß DIN 18800 Teil 2 geometrische Ersatzimperfektionen in Form von Vorkrümmungen und Vorverdrehungen angesetzt werden. Dabei wird zwischen dem Biegeknicken (Ausweichen um eine Achse) und dem Biegedrillknicken (Verschiebung in beide Auslenkrichtungen und Verdrehung des Querschnitts) unterschieden. Um den Einfluß der Verformungen auf einen biegeknickgefährdeten Träger zu beachten, muß eine Vorkrümmung angesetzt werden, deren Stich v_0 in der DIN 18800 Teil 2 angegeben ist. Dieser Stich ist von der Trägerlänge und der Knickspannungslinie abhängig.

Für das Problem des Biegedrillknickens ist laut DIN 18800 ebenfalls eine Vorkrümmung vorzugeben, jedoch mit dem um die Hälfte reduzierten Stich des Biegeknickens. Mit den daraus resultierenden Schnittgrößen wird der Interaktionsnachweis geführt. Der konstante Wert $0.5v_0$ als Ansatz für geometrische Ersatzimperfektionen ist aufgrund des einzigen Unterscheidungskriteriums nach den Knickspannungslinien in vielen Fällen unwirtschaftlich. Wählt man statt der Vorkrümmung die erste Eigenform des Trägers als Ansatz für die Ersatzimperfektion, so kommt man dem tatsächlichen Tragverhalten eines beliebigen Systems sehr nah.
Die Ermittlung der Verformungslinie des ersten Eigenwertes erfolgte im Rahmen dieser Diplomarbeit mit dem Biegetorsionsprogramm „btt“. Der größte Wert der berechneten Eigenform ist hierbei auf den Wert „1“ normiert und wird dann mit einem gewählten Faktor multipliziert. Dieser Faktor wird so bestimmt, daß der anschließende Interaktionsnachweis genau 1 ergibt. Die Ergebnisse können dann direkt mit den in der DIN 18800 angegeben Faktoren für den Ansatz einer Vorkrümmung als Ersatzimperfektion verglichen werden.

Ermittlung eines Faktors für den Ansatz der Eigenform

- Einfeldträger mit angreifender Streckenlast am Obergurt

$$\frac{M_d}{\kappa_M \cdot M_{pl,d}} = 1$$

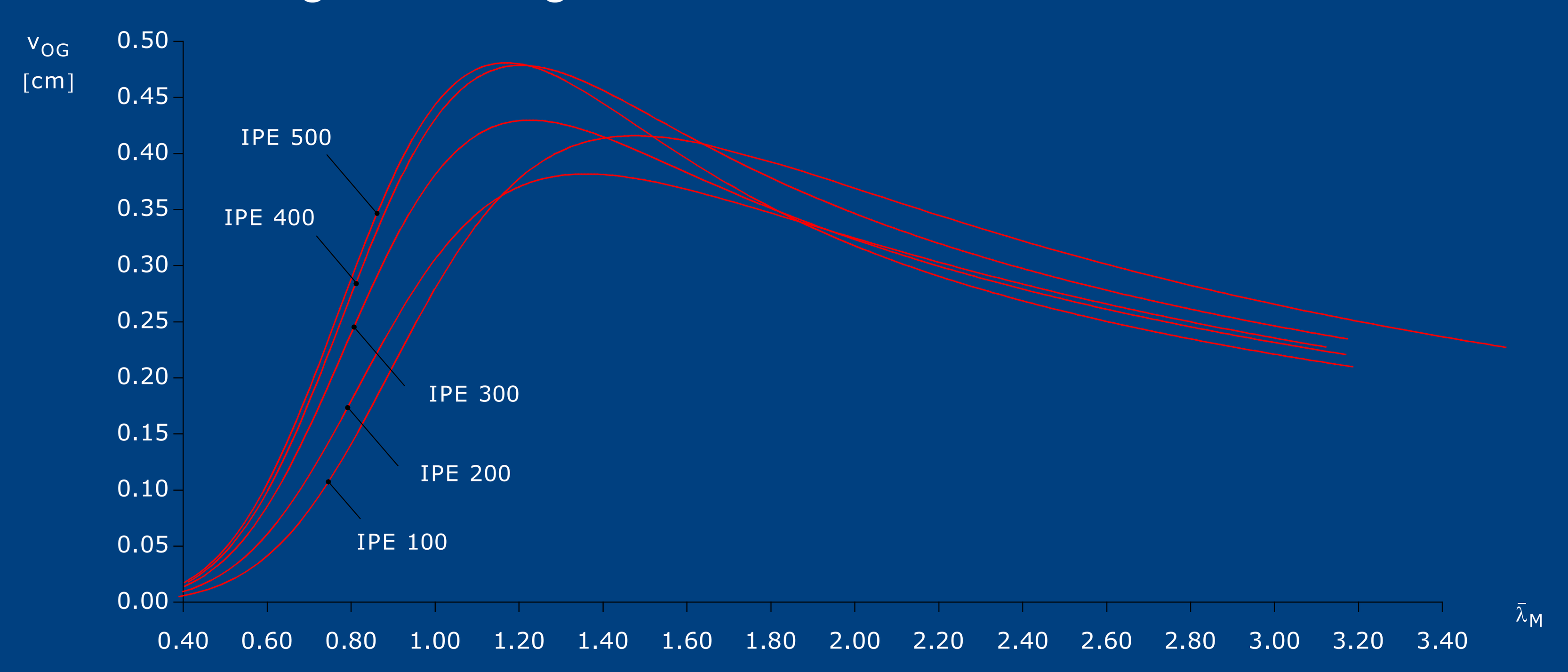
- Bestimmung von κ_M über $M_{Ki,k}$, $M_{pl,k}$ und $\bar{\lambda}_M$

$$\Rightarrow \quad M_d = \kappa_M \cdot M_{pl,d} \quad \Rightarrow \quad q_d$$

- Interaktionsnachweis führen

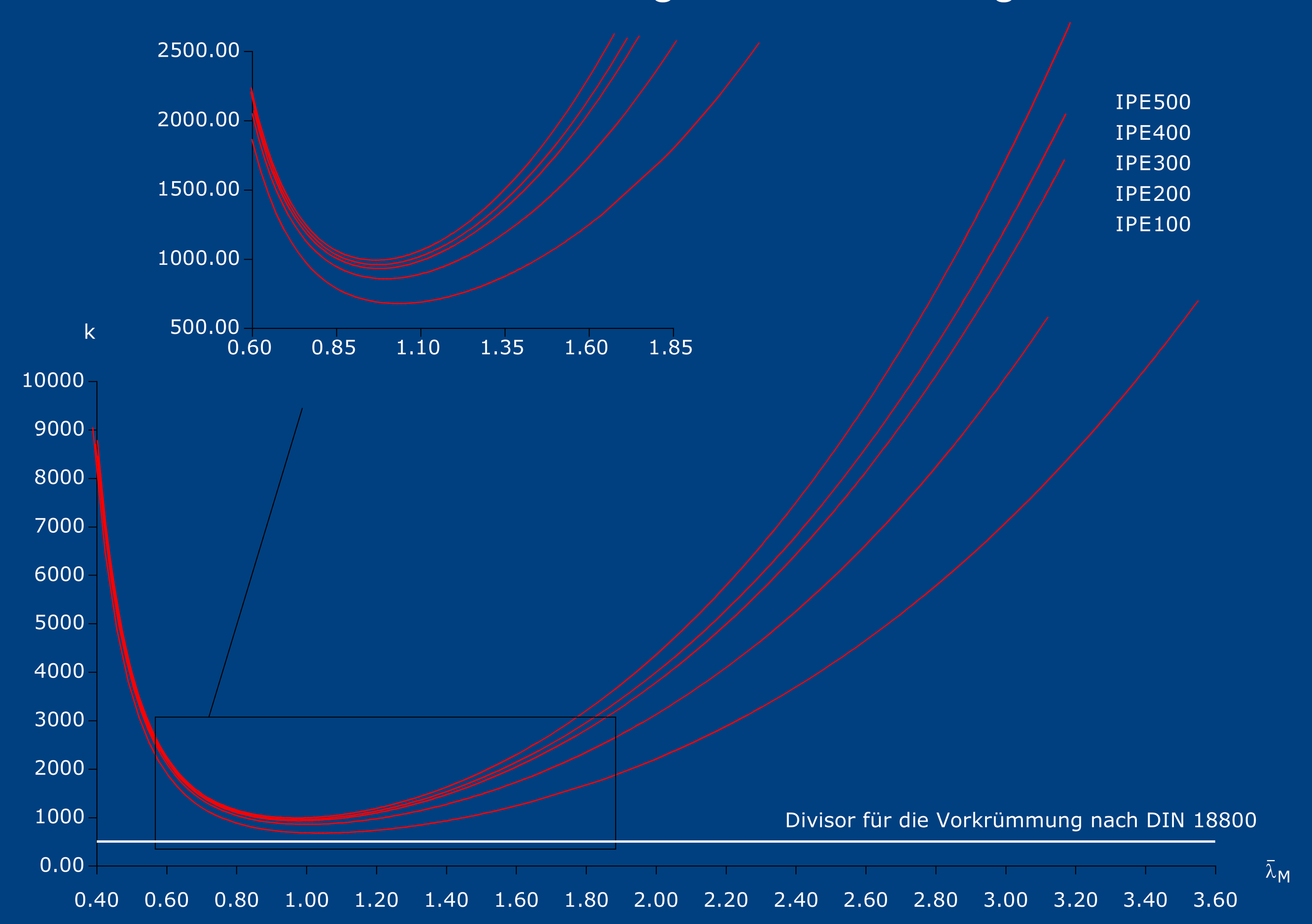
$$\left(\frac{M_z}{M_{pl,z,d}}\right) + \left(\frac{M_y}{M_{pl,y,d}}\right)^{2.3} + \left(\frac{M_\omega}{M_{pl,\omega,d}}\right) = 1$$

Verschiebung des Obergurtes



Es zeigt sich dabei, daß der Wert des Stichs für eine Ersatzimperfektion, der nach DIN 18800 für das Biegedrillknicken angesetzt werden soll, auf die Größe der seitlichen Obergurtverschiebung angewandt werden kann. Daraus muß nur noch der Faktor für den auf „1“ normierten Wert der Eigenform bestimmt werden. Die Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit anschließendem Interaktionsnachweis liefert damit Ergebnisse, die auf der sicheren Seite liegen, jedoch zu einer wirtschaftlicheren Bemessung führen.

Divisor k für die seitliche Obergurtverschiebung



Studentin: Bianca Hennings

Diplomstudiengang Bauingenieurwesen

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Raimond Dallmann

Hochschule Wismar
University of Technology, Business and Design
23966 Wismar, Philipp-Müller-Straße
Tel.: (03841) 753-0 Internet: www.hs-wismar.de