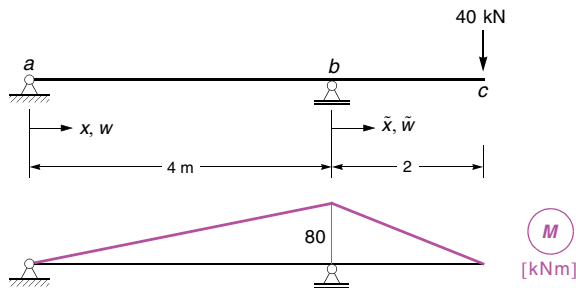


**Aufgabe 1**

1. Ermitteln Sie den Verlauf der  $EI$ -fachen Durchbiegung in den Bereichen  $a-b$  und  $b-c$  infolge der angegebenen Belastung durch Lösung der Differenzialgleichung.

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung im Bereich  $b-c$  die Ergebnisse des Bereiches  $a-b$ .

2. Kontrollieren Sie die Durchbiegung im Punkt  $c$  aus der Lösung nach 1. mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte.



- Bereich  $a-b$

$$M(x) = -20x$$

$$EIw''(x) = -M(x) = 20x$$

$$EIw'(x) = 10x^2 + c_1$$

$$EIw(x) = \frac{10}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$w(4) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{160}{3}$$

$$EIw(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{160}{3}x$$

$$EIw'(x) = 10x^2 - \frac{160}{3}$$

$$EIw'(4) = 10(4^2) - \frac{160}{3} = \frac{320}{3}$$

- Bereich  $b-c$

$$M(x) = 40x - 80$$

$$EIw''(x) = -M(x) = -40x + 80$$

$$EIw'(x) = -20x^2 + 80x + c_1$$

$$EIw(x) = -\frac{20}{3}x^3 + 40x^2 + c_1x + c_2$$

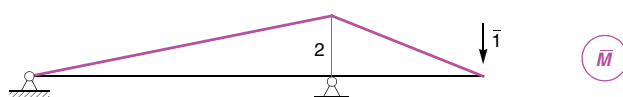
Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$EIw'(0) = \frac{320}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{320}{3}$$

$$EIw(x) = -\frac{20}{3}x^3 + 40x^2 + \frac{320}{3}x$$

$$EIw(2) = -\frac{20}{3}2^3 + 40(2^2) + \frac{320}{3}(2) = 320$$



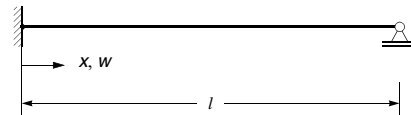
$$\bar{1} \cdot \delta' = \frac{1}{l} \int_0^l M \bar{M} dx = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 80 = 320$$

**Aufgabe 2**

Ermitteln Sie für den dargestellten Balken den Verlauf der Zustandsgrößen infolge der angegebenen Einwirkungen in Abhängigkeit gegebener Parameter durch Lösung der Differenzialgleichung.

1. Konstante Streckenlast  $q$

2. Temperaturdifferenz  $\Delta T$



- Gegeben:  $l, EI, \alpha_T, h, \Delta T, q$

1. Konstante Streckenlast  $q$

$$EIw''''(x) = q$$

$$EIw'''(x) = qx + c_1$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{2}qx^2 + c_1x + c_2$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$EIw(x) = \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{24}ql^4 + \frac{1}{6}c_1l^3 + \frac{1}{2}c_2l^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}ql^2 + \frac{1}{3}c_1l + c_2 = 0$$

$$w''(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}ql^2 + c_1l + c_2 = 0$$

Subtraktion der letzten beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2}ql^2 + c_1l + c_2 - \left( \frac{1}{12}ql^2 + \frac{1}{3}c_1l + c_2 \right) = 0$$

$$c_1 = -\frac{5}{8}ql \Rightarrow c_2 = \frac{ql^2}{8}$$

$$EIw(x) = \frac{ql^4}{48} \left( 2\frac{x^4}{l^4} - 5\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$EIw'(x) = \frac{ql^3}{48} \left( 8\frac{x^3}{l^3} - 15\frac{x^2}{l^2} + 6\frac{x}{l} \right)$$

$$EIw''(x) = \frac{ql^2}{48} \left( 24\frac{x^2}{l^2} - 30\frac{x}{l} + 6 \right) = -M(x)$$

$$EIw'''(x) = \frac{ql}{48} \left( 48\frac{x}{l} - 30 \right) = qx - \frac{5}{8}ql = -V(x)$$

Maximale Durchbiegung:

$$EIw'(x) = \frac{ql^3}{48} \left( 8\frac{x^3}{l^3} - 15\frac{x^2}{l^2} + 6\frac{x}{l} \right) = 0$$

$$8 \frac{x^3}{l^3} - 15 \frac{x^2}{l^2} + 6 \frac{x}{l} = 0$$

$$\frac{x}{l} \left( 8 \frac{x^2}{l^2} - 15 \frac{x}{l} + 6 \right) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - \frac{15}{8}xl + \frac{3}{4}l^2 = 0$$

$$x = \frac{15}{16}l \pm \sqrt{\left(\frac{15}{16}l\right)^2 - \frac{3}{4}l^2}$$

$$x = \frac{15}{16}l \pm l \frac{\sqrt{33}}{16}$$

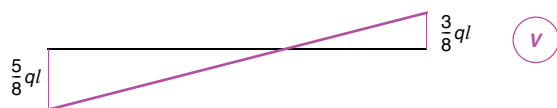
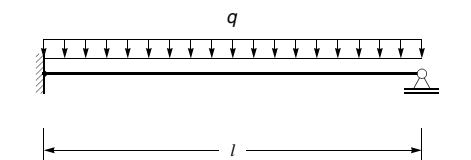
$$x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16}l = 0.57846483l$$

$$EIw(x) =$$

$$= \frac{ql^4}{48} (2 \cdot 0.57846483^4 - 5 \cdot 0.57846483^3 + 3 \cdot 0.57846483)$$

$$= \frac{ql^4}{48} (0.25997384) = \frac{2.0797907}{384} ql^4$$

- Darstellung der Zustandslinien



## 2. Temperaturdifferenz $\Delta T$

$$EIw''''(x) = 0$$

$$EIw'''(x) = c_1$$

$$EIw''(x) = c_1x + c_2$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$EIw(x) = \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}c_1l^3 + \frac{1}{2}c_2l^2 = 0 \Rightarrow c_1l + 3c_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$M(l) = 0$$

$$w''(x) = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$M(x) = -EIw''(x) - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$M(x) = -(c_1x + c_2) - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$M(l) = -c_1l - c_2 - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} = 0 \quad (2.2)$$

Addition von (2.1) und (2.2):

$$c_1l + 3c_2 - c_1l - c_2 - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{3}{l}c_2 = -\frac{3}{2l}EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$EIw(x) = -\frac{1}{4l}EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}x^3 + \frac{1}{4}EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}x^2$$

$$EIw(x) = EI \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( -\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$EIw'(x) = EI \cdot \frac{l}{4} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( -3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x}{l} \right)$$

$$EIw''(x) = EI \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( -3\frac{x}{l} + 1 \right)$$

$$EIw'''(x) = -EI \cdot \frac{3}{2l} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} = -V(x)$$

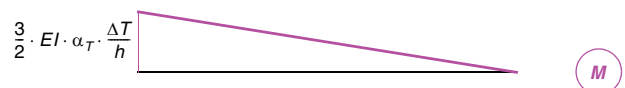
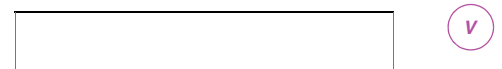
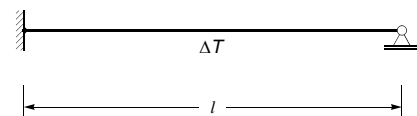
$$M(x) = -EIw''(x) - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$= EI \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( 3\frac{x}{l} - 1 \right) - EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$= EI \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( 3\frac{x}{l} - 1 - 2 \right)$$

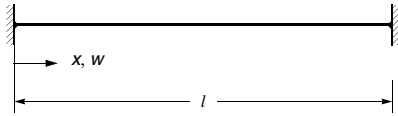
$$= EI \cdot \frac{3}{2} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$

- Darstellung der Zustandslinien



**Aufgabe 3**

Ermitteln Sie für den dargestellten Balken den Verlauf der Zustandsgrößen infolge einer Temperaturdifferenz im gesamten Balken in Abhängigkeit gegebener Parameter durch Lösung der Differenzialgleichung.



- Gegeben:  $l, EI, \alpha_T, h, \Delta T$

$$EI w''''(x) = 0$$

$$EI w'''(x) = c_1$$

$$EI w''(x) = c_1 x + c_2$$

$$EI w'(x) = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI w(x) = \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} c_1 l^3 + \frac{1}{2} c_2 l^2 = 0 \Rightarrow c_1 l + 3 c_2 = 0$$

$$w'(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} c_1 l^2 + c_2 l = 0 \Rightarrow c_1 l + 2 c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow w(x) = w'(x) = w''(x) = w'''(x) = 0$$

$$w''(x) = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} = 0$$

$$\Rightarrow M = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} = \text{konst.}$$