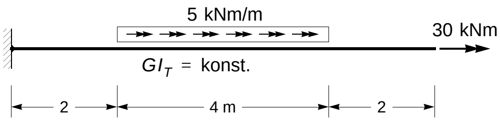
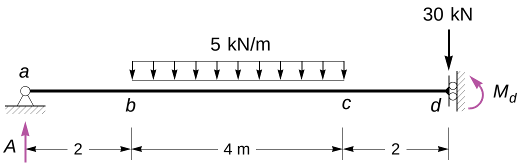
Aufgabe 1.1



- Adjungiertes System mit Belastung

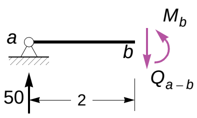


Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

$\sum V = 0: \quad -A + 5 \cdot 4 + 30 = 0 \Rightarrow A = 50$

$\sum M_{(d)} = 0: \quad M_d + 5 \cdot 4 \cdot 4 - 50 \cdot 8 = 0 \Rightarrow M_d = 320$

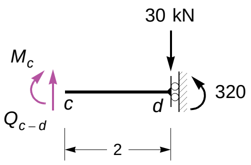
- Schnitt im Punkt *b*, linkes Teilsystem



$\sum V = 0: \quad Q_{a-b} - 50 = 0 \Rightarrow Q_{a-b} = 50$

$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 50 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_b = 100$

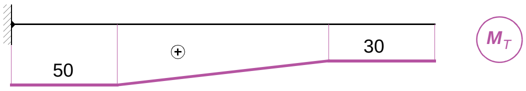
- Schnitt im Punkt *c*, rechtes Teilsystem

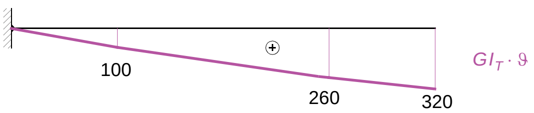


$\sum V = 0: \quad -Q_{c-d} + 30 = 0 \Rightarrow Q_{c-d} = 30$

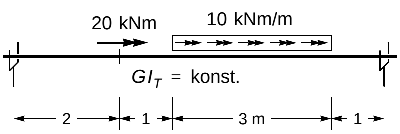
$\sum M_{(c)} = 0: \quad -M_c - 30 \cdot 2 + 320 = 0 \Rightarrow M_c = 260$

- Darstellung der Zustandslinien ($Q \mathrel{\hat{=}} M_T$, $M \mathrel{\hat{=}} GI_T \cdot \vartheta$)

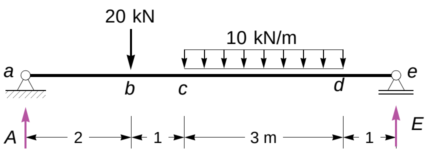




Aufgabe 1.2



- Adjungiertes System mit Belastung

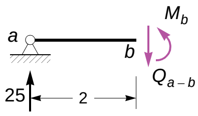


Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

$\sum M_{(a)} = 0: \quad E \cdot 7 - 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 0 \Rightarrow E = 25$

$\sum V = 0: \quad -A + 10 \cdot 3 + 20 - 25 = 0 \Rightarrow A = 25$

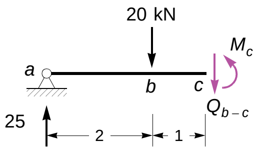
- Schnitt links von *b*, linkes Teilsystem



$\sum V = 0: \quad Q_{a-b} - 25 = 0 \Rightarrow Q_{a-b} = 25$

$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 25 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_b = 50$

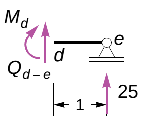
- Schnitt im Punkt *c*, linkes Teilsystem



$\sum V = 0: \quad Q_{b-c} - 25 + 20 = 0 \Rightarrow Q_{b-c} = 5$

$\sum M_{(c)} = 0: \quad M_c - 25 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_c = 55$

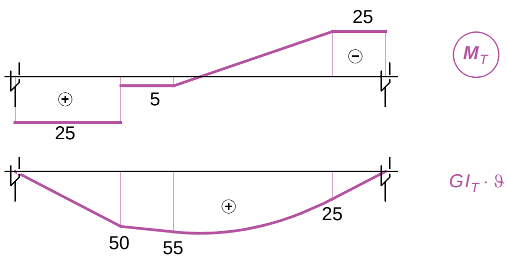
- Schnitt im Punkt *d*, rechtes Teilsystem



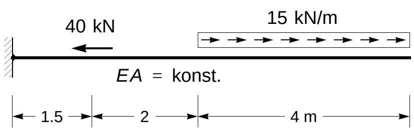
$\sum V = 0: \quad -Q_{d-e} - 25 = 0 \Rightarrow Q_{d-e} = -25$

$\sum M_{(d)} = 0: \quad -M_d + 25 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_c = 25$

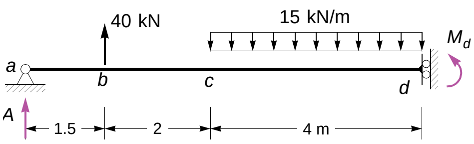
- Darstellung der Zustandslinien ($Q \mathrel{\hat{=}} M_T$, $M \mathrel{\hat{=}} GI_T \cdot \vartheta$)



Aufgabe 1.3



- Adjungiertes System mit Belastung

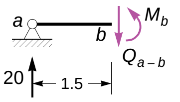


Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

$\sum M_{(a)} = 0: \quad M_d + 40 \cdot 1{,}5 - 15 \cdot 4 \cdot 5{,}5 = 0 \Rightarrow M_d = 270$

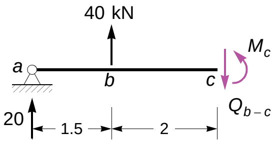
$\sum V = 0: \quad -A + 15 \cdot 4 - 40 = 0 \Rightarrow A = 20$

- Schnitt links von b, linkes Teilsystem



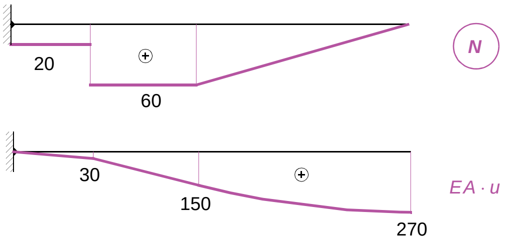
$$\sum V = 0: \quad Q_{a-b} - 20 = 0 \Rightarrow Q_{a-b} = 20$$
$$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 20 \cdot 1{,}5 = 0 \Rightarrow M_b = 30$$

- Schnitt im Punkt c, linkes Teilsystem

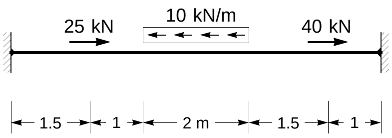


$$\sum V = 0: \quad Q_{b-c} - 20 - 40 = 0 \Rightarrow Q_{b-c} = 60$$
$$\sum M_{(c)} = 0: \quad M_c - 20 \cdot 3{,}5 - 40 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_c = 150$$

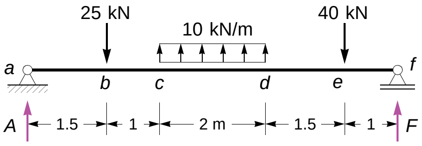
- Darstellung der Zustandslinien ($Q \mathrel{\hat{=}} N$, $M \mathrel{\hat{=}} EA \cdot u$)



Aufgabe 1.4



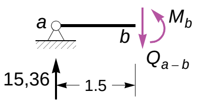
- Adjungiertes System mit Belastung



Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

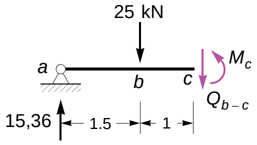
$$\sum M_{(a)} = 0: \quad F \cdot 7 + 10 \cdot 2 \cdot 3{,}5 - 25 \cdot 1{,}5 - 40 \cdot 6 = 0$$
$$\Rightarrow F = 29{,}64$$
$$\sum V = 0: \quad -A - 29{,}64 + 25 + 40 - 10 \cdot 2 = 0$$
$$\Rightarrow A = 15{,}36$$

- Schnitt links von b, linkes Teilsystem



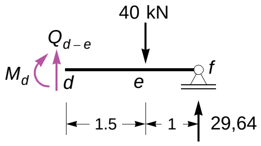
$$\sum V = 0: \quad Q_{a-b} - 15{,}36 = 0 \Rightarrow Q_{a-b} = 15{,}36$$
$$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 15{,}36 \cdot 1{,}5 = 0 \Rightarrow M_b = 23{,}04$$

- Schnitt im Punkt c, linkes Teilsystem



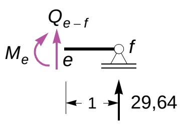
$$\sum V = 0: \quad Q_{b-c} - 15{,}36 + 25 = 0 \Rightarrow Q_{b-c} = -9{,}64$$
$$\sum M_{(c)} = 0: \quad M_c - 15{,}36 \cdot 2{,}5 + 25 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_c = 13{,}39$$

- Schnitt im Punkt d, rechtes Teilsystem



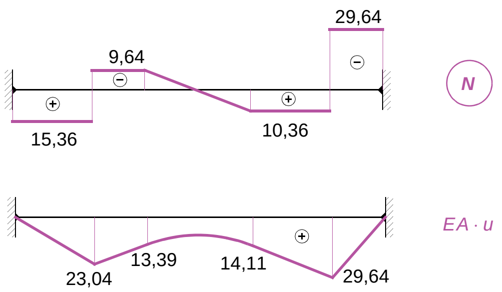
$$\sum V = 0: \quad -Q_{d-e} + 40 - 29{,}64 = 0 \Rightarrow Q_{d-e} = 10{,}36$$
$$\sum M_{(d)} = 0: \quad -M_d - 40 \cdot 1{,}5 + 29{,}64 \cdot 2{,}5 = 0$$
$$\Rightarrow M_d = 14{,}11$$

- Schnitt rechts von e, rechtes Teilsystem

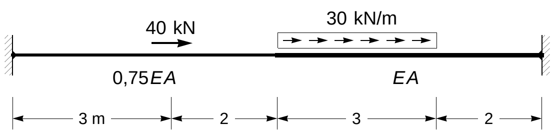


$$\sum V = 0: \quad -Q_{e-f} - 29{,}64 = 0 \Rightarrow Q_{e-f} = -29{,}64$$
$$\sum M_{(e)} = 0: \quad -M_e + 29{,}64 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_e = 29{,}64$$

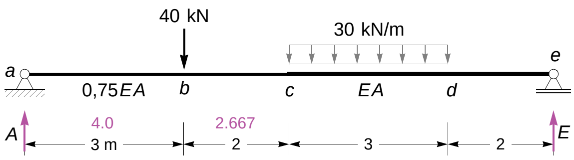
- Darstellung der Zustandslinien ($Q \mathrel{\hat{=}} N$, $M \mathrel{\hat{=}} EA \cdot u$)



Aufgabe 1.5



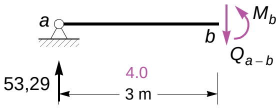
- Adjungiertes System mit Belastung



Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

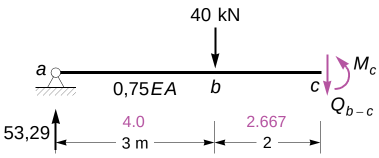
$$\sum M_{(a)} = 0: \quad E \cdot 11{,}667 - 40 \cdot 4 - 30 \cdot 3 \cdot 8{,}167 = 0$$
$$\Rightarrow E = 76{,}71$$
$$\sum V = 0: \quad -A - 76{,}71 + 40 + 30 \cdot 3 = 0 \Rightarrow A = 53{,}29$$

- Schnitt links von b, linkes Teilsystem



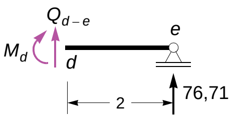
$$\sum V = 0: \quad Q_{a-b} - 53{,}29 = 0 \Rightarrow Q_{a-b} = 53{,}29$$
$$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 53{,}29 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_b = 213{,}16$$

- Schnitt im Punkt c, linkes Teilsystem



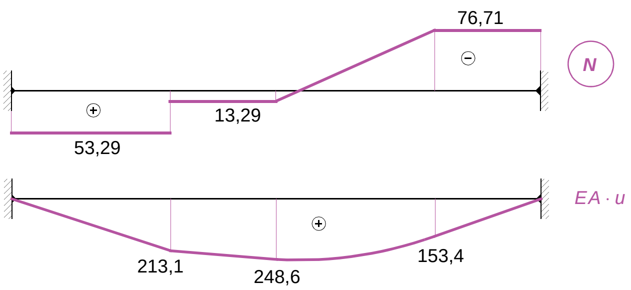
$$\sum V = 0: \quad Q_{b-c} - 53{,}29 + 40 = 0 \Rightarrow Q_{b-c} = 13{,}29$$
$$\sum M_{(c)} = 0: \quad M_c - 53{,}29 \cdot 6{,}667 + 40 \cdot 2{,}667 = 0$$
$$\Rightarrow M_c = 248{,}60443$$

- Schnitt im Punkt d, rechtes Teilsystem

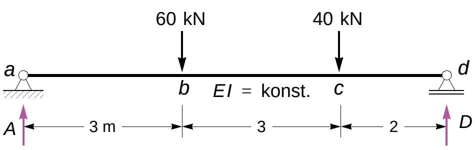


$$\sum V = 0: \quad -Q_{d-e} - 76{,}71 = 0 \Rightarrow Q_{d-e} = -76{,}71$$
$$\sum M_{(d)} = 0: \quad -M_d + 76{,}71 \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_d = 153{,}42$$

- Darstellung der Zustandslinien ($Q \mathrel{\hat{=}} N$, $M \mathrel{\hat{=}} EA \cdot u$)

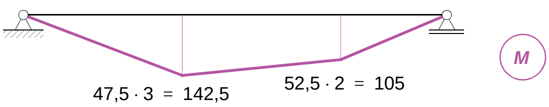


Aufgabe 1.6

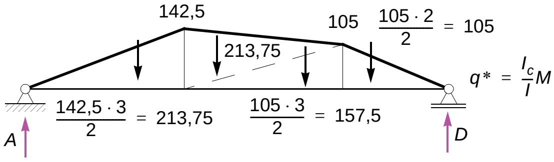


Ermittlung der Momentenlinie:

$$\sum M_{(a)} = 0: \quad D \cdot 8 - 40 \cdot 6 - 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow D = 52{,}5$$
$$\sum V = 0: \quad -A - 52{,}5 + 60 + 40 = 0 \Rightarrow A = 47{,}5$$

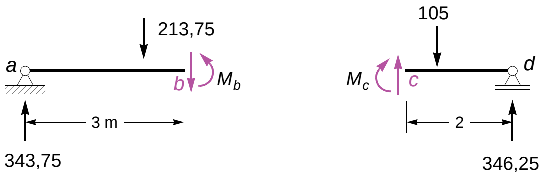


- Adjungiertes System mit Belastung q^*



Ermittlung der Schnittgrößen des adjungierten Systems:

$$\sum M_{(a)} = 0: \quad D \cdot 8 - 213{,}75 \cdot (2+4) - 157{,}5 \cdot 5 = 0$$
$$-105 \cdot 6{,}667 = 0 \Rightarrow D = 346{,}25$$
$$\sum V = 0: \; -A - 346{,}25 + 2 \cdot 213{,}75 + 157{,}5 + 105 = 0$$
$$\Rightarrow A = 343{,}75$$



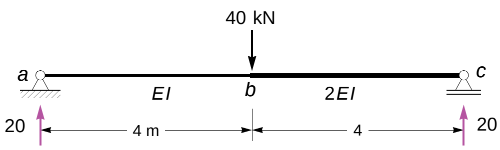
- Schnitt im Punkt b, linkes Teilsystem

$$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b + 213{,}75 \cdot 1 - 343{,}75 \cdot 3 = 0$$
$$\Rightarrow M_b = 817{,}5 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_b$$

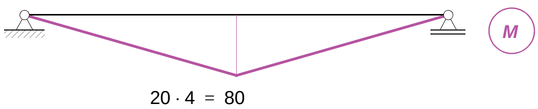
- Schnitt im Punkt c, rechtes Teilsystem

$$\sum M_{(c)} = 0: \quad -M_c + 346{,}25 \cdot 2 - 105 \cdot 0{,}667 = 0$$
$$\Rightarrow M_c = 622{,}5 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_c$$

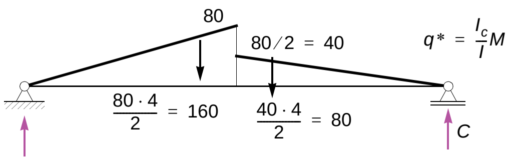
Aufgabe 1.7



Ermittlung der Momentenlinie:

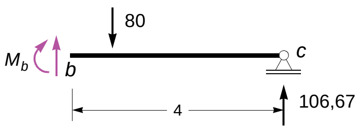


- Adjungiertes System mit Belastung q^*



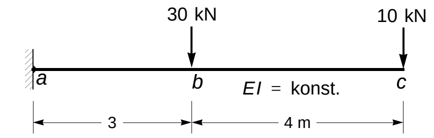
$$\sum M_{(a)} = 0: \quad C \cdot 8 - 160 \cdot 2{,}667 - 80 \cdot 5{,}333 = 0$$
$$\Rightarrow C = 106{,}67$$

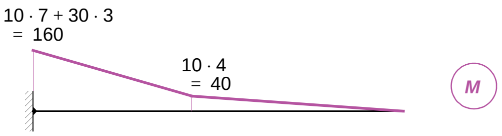
- Schnitt im Punkt b, rechtes Teilsystem



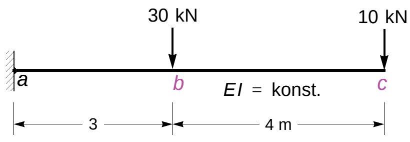
$$\sum M_{(b)} = 0: \quad -M_b + 106{,}67 \cdot 4 - 80 \cdot 1{,}333 = 0$$
$$\Rightarrow M_b = 320{,}0 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_b$$

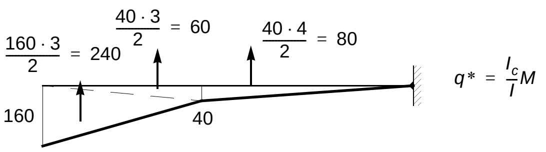
Aufgabe 1.8





- Adjungiertes System mit Belastung $q*$

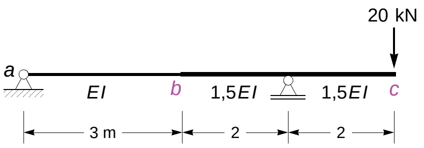


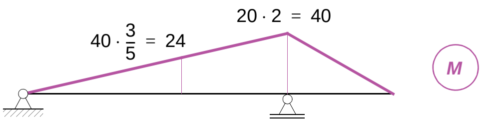


$$M_b = 240 \cdot 2 + 60 \cdot 1 = 540 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_b$$

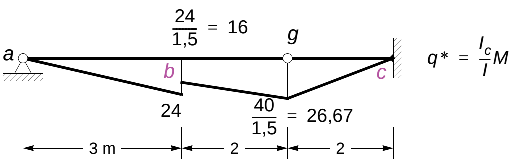
$$M_c = 240 \cdot 6 + 60 \cdot 5 + 80 \cdot 2{,}667 = 1953{,}33 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_c$$

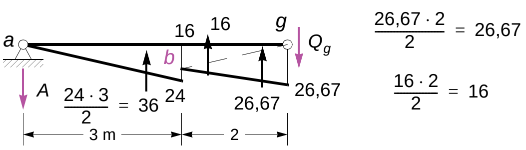
Aufgabe 1.9





- Adjungiertes System mit Belastung $q*$



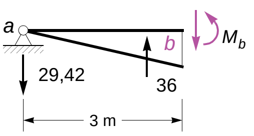


$$\sum M_{(g)} = 0: \quad A \cdot 5 - 36 \cdot 3 - 16 \cdot 1{,}333 - 26{,}67 \cdot 0{,}667 = 0$$

$$\Rightarrow A = 29{,}42$$

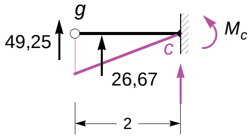
$$\sum V = 0: \quad Q_g + 29{,}423378 - 36 - 16 - 26{,}67 = 0$$

$$\Rightarrow Q_g = 49{,}25$$



$$\sum M_{(b)} = 0: \quad M_b - 36 \cdot 1 + 29{,}42 \cdot 3 = 0$$

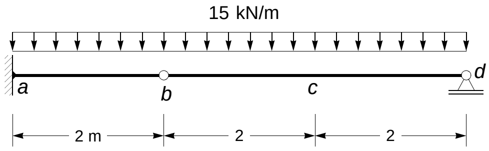
$$\Rightarrow M_b = -52{,}267 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_b$$



$$\sum M_{(c)} = 0: \quad M_c - 26{,}67 \cdot 1{,}333 - 49{,}25 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow M_c = 134{,}04 \mathrel{\hat{=}} EI \cdot \delta_c$$

Aufgabe 1.10



$EI = \text{konst.} = 10000\ \text{kN/m}^2$

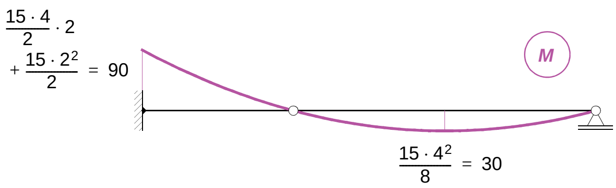
$\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

$h = 0{,}30\ \text{m}$

- Lastfall 1:

Konstante Streckenlast im gesamten Bereich

Momentenlinie infolge Lastfall 1:



- Lastfall 2:

Temperaturdifferenz $\Delta T = 40°$ (oben wärmer) im Bereich $a - b$

- Lastfall 3:

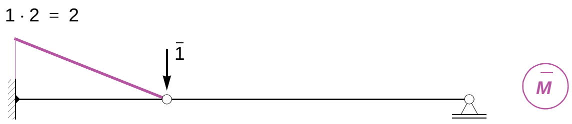
Eingeprägte Drehung des Auflagers im Punkt a um 0,02 rad im Uhrzeigersinn.

- Lastfall 4:

Eingeprägte Senkung des Auflagers im Punkt d um 4 cm.

1. Ermittlung von δ_b infolge Lastfall 1

- Virtueller Zustand



$$\bar{1} \cdot \delta'_b = \frac{I_c}{I} \int M \bar{M}\, dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.1* ergibt

$$\delta'_b = 110 \Rightarrow \delta_b = \frac{110}{10000} = 0{,}0110\ \text{m} = 11{,}0\ \text{mm}$$

Tabelle 1.1 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\overline{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	1,0	2,0	90 ⊖	2 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2{,}0) \cdot (-90)$	120
			⊕ 7,5	2 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2{,}0) \cdot 7{,}5$	–10
						110

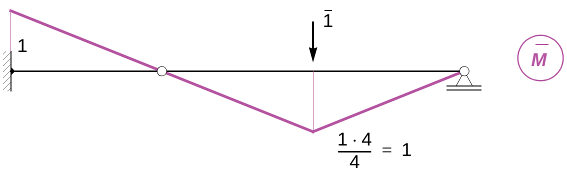
2. Ermittlung von δ_b infolge Lastfall 2

$$\bar{1} \cdot \delta_b = \int \overline{M}\,\alpha_T \frac{\Delta T}{h}\,dx$$

$$= 2{,}0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{40}{0{,}3} = 0{,}0032 \text{ m} = 3{,}2 \text{ mm}$$

3. Ermittlung von δ_c infolge Lastfall 1

- Virtueller Zustand



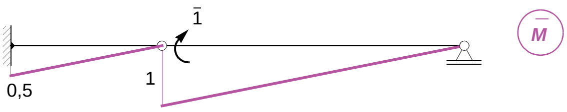
$$\bar{1} \cdot \delta'_c = \frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.2* ergibt

$$\delta'_c = 105 \Rightarrow \delta_c = \frac{105}{10000} = 0{,}0105 \text{ m} = 10{,}5 \text{ mm}$$

4. Die Drehung der Tangente rechts vom Punkt b infolge Lastfall 1.

- Virtueller Zustand

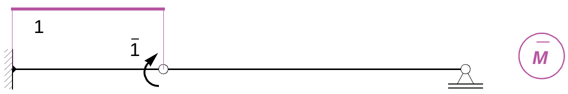


$$\bar{1} \cdot \delta'_c = \frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.3* ergibt

$$\varphi'_{b,\,re} = 12{,}5 \Rightarrow \varphi_{b,\,re} = \frac{12{,}5}{10000} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

5. Die Drehung der Tangente links vom Punkt b infolge Lastfall 1.

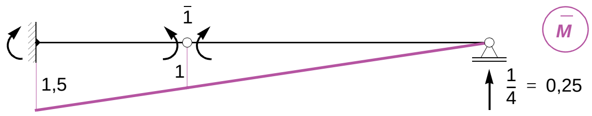


$$\bar{1} \cdot \delta'_c = \frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.4* ergibt

$$\varphi'_{b,\,li} = 80 \Rightarrow \varphi_{b,\,li} = \frac{80}{10000} = 8{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

6. Die Relativdrehung der Tangenten (Knick) im Punkt b infolge Lastfall 1.



$$\bar{1} \cdot \Delta\varphi'_b = \frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.5* ergibt

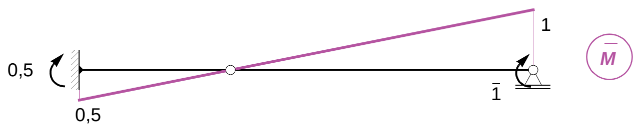
$$\varphi'_{b,\,li} = -67{,}5 \Rightarrow \Delta\varphi_b = \frac{-67{,}5}{10000} = -6{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

bzw.

$$\Delta\varphi_b = \varphi_{b,\,re} - \varphi_{b,\,li}$$

$$= 1{,}25 \cdot 10^{-3} - 8{,}0 \cdot 10^{-3} = -6{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

7. Die Drehung der Tangente im Punkt d infolge Lastfall 3.



$$\bar{1} \cdot \varphi_d = -\overline{M}_a\,\varphi = -[0{,}5 \cdot 0{,}02] = -0{,}01 \text{ rad}$$

Tabelle 1.2 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\overline{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	1,0	2,0	90 ⊖	1 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1{,}0) \cdot (-90)$	60
			⊕ 7,5	1 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1{,}0) \cdot 7{,}5$	–5
$b-d$	1,0	4,0	⊕ 30	⊕ 1	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 30 \cdot (1 + 0{,}5^2)$	50
						105

Tabelle 1.3 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\overline{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	1,0	2,0	90 ⊖	0,5 ⊕	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (-90)$	–30
			⊕ 7,5	0,5 ⊕	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}5$	2,5
$b-d$	1,0	4,0	⊕ 30	1 ⊕	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 30$	40
						12,5

Tabelle 1.4 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\overline{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	1,0	2,0	90 ⊖	1 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (-90)$	90
			⊕ 7,5	1 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1) \cdot 7{,}5$	–10
						80

Tabelle 1.5 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\overline{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\overline{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	1,0	2,0	90 ⊖	1,5 ⊕ 1	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-90) \cdot (2 \cdot 1{,}5 + 1{,}0)$	–120
			⊕ 7,5	1,5 ⊕ 1	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7{,}5 \cdot (1{,}5 + 1{,}0)$	12,5
$b-d$	1,0	4,0	⊕ 30	1 ⊕	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 30$	40
						–67,5

8. Die Relativdrehung der Tangenten (Knick) im Punkt b infolge Lastfall 4.

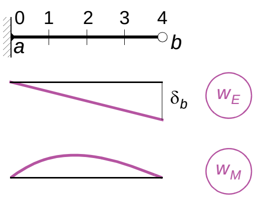
$$\bar{1} \cdot \Delta\varphi_b = -\bar{D}\,\delta_d = -[-0{,}25 \cdot 0{,}04] = 0{,}01 \text{ rad}$$

9. Die Biegelinie des Systems mit Hilfe der ω-Zahlen infolge Lastfall 1. Die Ordinaten sind im Abstand von 0,5 m zu berechnen.

- Bereich $a-b$, $n = 4$

$$w = w_E + w_M$$

Verformungsanteile im Bereich $a-b$



$$EI_c \cdot w_M^D = \frac{1}{6} \cdot (-90) \cdot 2^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_D = -60\omega'_D$$

$$w_M^D = \frac{-60\omega'_D}{EI_c} = \frac{-60\omega'_D}{10000} = -0{,}006\omega'_D \text{ m} = -6\omega'_D \text{ mm}$$

$$EI_c \cdot w_M^P = \frac{1}{3} \cdot 7{,}5 \cdot 2^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_{P1} = 10\omega_{P1}$$

$$w_M^P = \frac{10\omega_{P1}}{EI_c} = \frac{10\omega_{P1}}{10000} = 0{,}001\omega_{P1} \text{ m} = \omega_{P1} \text{ mm}$$

Tabelle 1.6 Ermittlung der Verformung im Bereich $a-b$ in mm

	0	1	2	3	4
w_E	0	2,750	5,500	8,250	11,00
$\omega_D \cdot 10^4$	0	3281	3750	2344	0
$w_M^D = -6\omega'_D$	0	-1,969	-2,250	-1,406	0
$\omega_{P1} \cdot 10^4$	0	2227	3125	2227	0
$w_M^P = \omega_{P1}$	0	0,223	0,313	0,223	0
	0	1,004	3,563	7,066	11,00

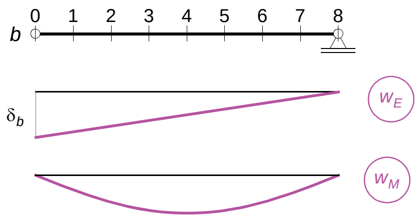
Tabelle 1.7 Ermittlung der Verformung im Bereich $b-d$ in mm

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w_E	11,00	9,625	8,250	6,875	5,500	4,125	2,750	1,375	0
$\omega_{P1} \cdot 10^4$	0	1213	2227	2893	3125	2893	2227	1213	0
$w_M^P = 16\omega_{P1}$	0	1,941	3,563	4,629	5,000	4,629	3,563	1,941	0
	11,00	11,57	11,81	11,50	10,50	9,754	6,313	3,316	0

- Bereich $b-d$, $n = 8$

$w = w_E + w_M$

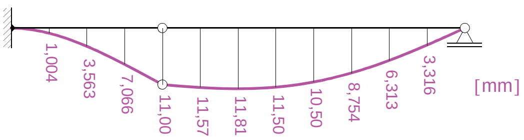
Verformungsanteile im Bereich $b-d$



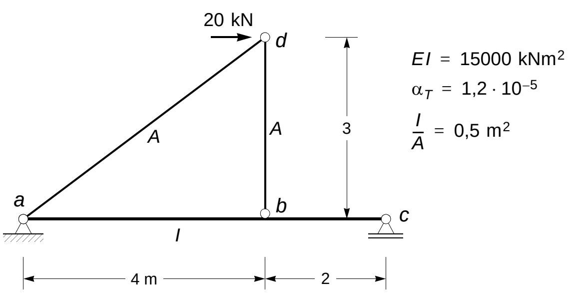
$$EI_c \cdot w_M^P = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_{P1} = 160\omega_{P1}$$

$$w_M^P = \frac{160\omega_{P1}}{EI_c} = \frac{160\omega_{P1}}{10000} = 0{,}016\omega_{P1}\ \text{m} = 16\omega_{P1}\ \text{mm}$$

- Darstellung der Biegelinie



Aufgabe 1.11

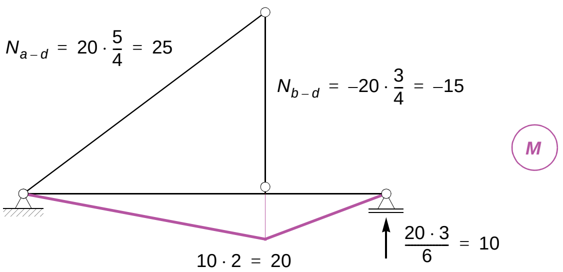


1. Die horizontale Verschiebung des Punktes d infolge der angegebenen Horizontalkraft.

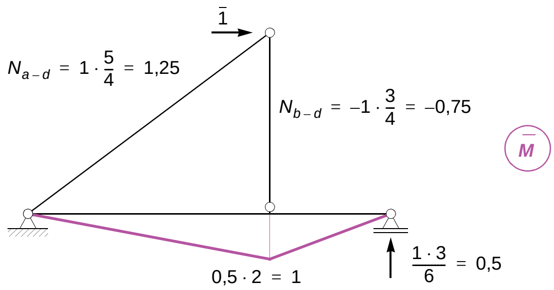
Tabelle 1.8

2.

- Schnittgrößen infolge der Horizontalkraft



- Virtueller Zustand



- Auswertung der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta'_{d,h} = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx + \frac{I_c}{A}\int N\bar{N}\,dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 1{,}25$$

$$+ 0{,}5 \cdot 3 \cdot (-15) \cdot (-0{,}75)$$

$$= 40 + 78{,}125 + 16{,}875 = 135$$

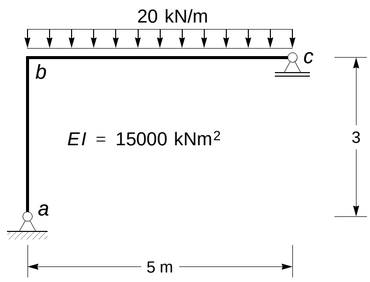
$$\delta_{d,h} = \frac{135}{15000} = 0{,}009\ \text{m}$$

3. Die horizontale Verschiebung des Punktes d infolge Abkühlung des Stabes $b-d$ um 40°.

$$\bar{1} \cdot \delta_{d,h} = \int \bar{N}\,\alpha_T\,T_0\,dx$$

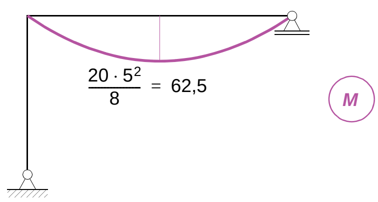
$$\delta_{d,h} = 3 \cdot (-0{,}75) \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (-40) = 0{,}00108\ \text{m}$$

Aufgabe 1.12

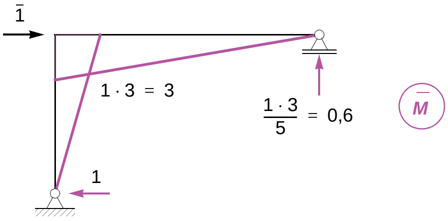


1. Die horizontale Verschiebung des Riegels infolge der angegebenen Streckenlast.

- Momentenlinie infolge der Streckenlast



- Virtueller Zustand

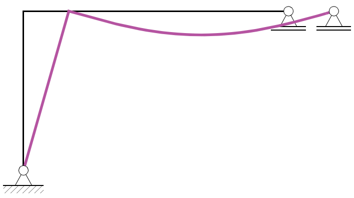


- Auswertung der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta'_h = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx = 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 62{,}5 \cdot 3 = 312{,}5$$

$$\delta_h = \frac{312{,}5}{15000} = 0{,}02083 \text{ m}$$

2. Skizze der Verformung des Systems infolge der angegebenen Streckenlast.



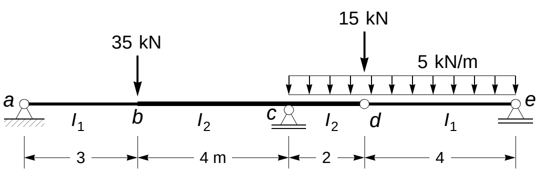
Der Riegel krümmt sich entsprechend der Momentenlinie nach unten, der Stiel bleibt gerade ($M = 0$). Da in der biegesteifen Ecke der rechte Winkel erhalten bleiben muss, folgt die horizontale Verschiebung des Riegels.

3. Die horizontale Verschiebung des Riegels infolge einer Senkung des Auflagerpunktes c um 4 cm.

$$\delta_h = -\bar{C}\,c = -[-0{,}6 \cdot 0{,}04] = 0{,}024 \text{ m}$$

Die Arbeit in der eckigen Klammer ist negativ, da die virtuelle Auflagerkraft und die Auflagersenkung entgegengerichtet sind.

Aufgabe 1.13

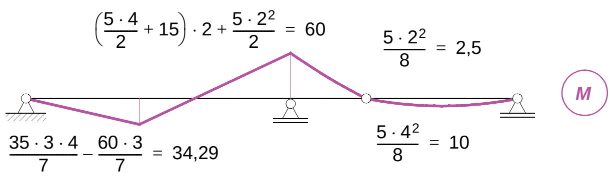


$EI_1 = 5000 \text{ kNm}^2$ $\quad EI_2 = 10000 \text{ kNm}^2 = EI_c$

$$\frac{I_c}{I_2} = 1 \qquad \frac{I_c}{I_1} = \frac{10000}{5000} = 2$$

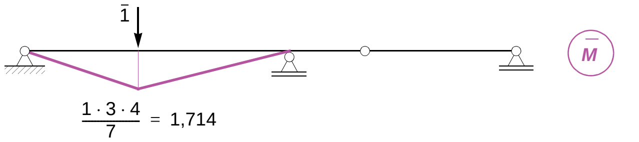
1. Die Biegelinie des Systems mit Hilfe der ω-Zahlen infolge der angegebenen Belastung. Die Ordinaten sind im Abstand von 1,0 m zu berechnen.

- Momentenlinie infolge der Belastung



Für den Verformungsanteil w_E werden die Verschiebungen in den Punkten b und d benötigt.

- Ermittlung der Einzelverformung im Punkt b mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte

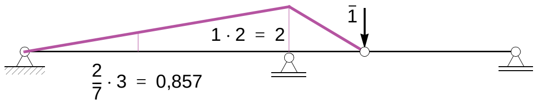


$$\bar{1} \cdot \delta'_b = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.10* ergibt

$$\delta'_b = 127{,}35 \Rightarrow \delta_b = \frac{127{,}35}{10000} = 0{,}012735 \text{ m} = 12{,}74 \text{ mm}$$

- Ermittlung der Einzelverformung im Punkt d mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte



$$\bar{1} \cdot \delta'_d = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$$

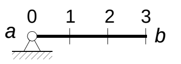
Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.11* ergibt

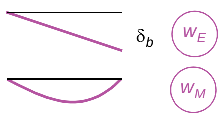
$$\delta'_d = 127{,}28 \Rightarrow \delta_d = \frac{127{,}28}{10000} = 0{,}012728 \text{ m} = 12{,}73 \text{ mm}$$

- Bereich $a - b$, $n = 3$

$$w = w_E + w_M$$

Verformungsanteile im Bereich $a - b$





$$EI_c \cdot w_M^D = \frac{1}{6} \cdot 34{,}286 \cdot 3^2 \cdot 2{,}0 \cdot \omega_D = 102{,}858\,\omega_D$$

$$w_M^D = \frac{102{,}858\,\omega_D}{EI_c} = \frac{102{,}858\,\omega_D}{10000} = 0{,}0102858\,\omega_D$$

$$= 10{,}2858\,\omega_D \text{ mm}$$

Tabelle 1.9 Ermittlung der Verformung im Bereich $a - b$ in mm

	0	1	2	3
w_E	0	4,245	8,490	12,74
$\omega_D \cdot 10^4$	0	2963	3704	0
$w_M^D = 10{,}2858\,\omega_D$	0	3,048	3,810	0
	0	7,293	12,30	12,74

Tabelle 1.10 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\bar{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	2,0	3,0	⊕ 34,29	⊕ 1,714	$2{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}714 \cdot 34{,}29$	117,55
$b-c$	1,0	4,0	⊕ 34,29; ⊖ 60	1,714 ⊕	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}714 \cdot (2 \cdot 34{,}29 - 60)$	9,80
						127,35

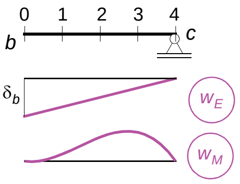
Tabelle 1.11 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\bar{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$	Ergebnis
$a-b$	2,0	3,0	⊕ 34,29	⊖ 0,857	$2{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-0{,}857) \cdot 34{,}29$	–58,77
$b-c$	1,0	4,0	⊕ 34,29; ⊖ 60	0,857 ⊖ 2	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot [(-0{,}857) \cdot (2 \cdot 34{,}29 - 60)$ $-2 \cdot (2 \cdot (-60) + 34{,}29)]$	109,38
$c-d$	1,0	2,0	60 ⊖	2 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-60) \cdot (-2)$	80
			⊕ 2,5	2 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}5 \cdot (-2)$	–3,33
						127,28

- Bereich $b-c$, $n = 4$

$w = w_E + w_M$

Verformungsanteile im Bereich $b-c$



$$EI_c \cdot w_M^{D1} = \frac{1}{6} \cdot (-60) \cdot 4^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_D = -160\omega_D$$

$$w_M^{D1} = \frac{-160\omega_D}{EI_c} = \frac{-160\omega_D}{10000} = -0{,}016\omega_D \text{ m} = -16\omega_D \text{ mm}$$

$$EI_c \cdot w_M^{D2} = \frac{1}{6} \cdot 34{,}286 \cdot 4^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega'_D = 91{,}43\omega'_D$$

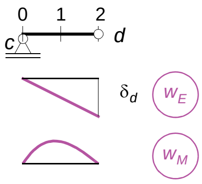
$$w_M^{D2} = \frac{91{,}43\omega'_D}{EI_c} = \frac{91{,}43\omega'_D}{10000} = 0{,}009143\omega'_D \text{ m}$$

$$= 9{,}143\omega'_D \text{ mm}$$

- Bereich $c-d$, $n = 2$

$w = w_E + w_M$

Verformungsanteile im Bereich $c-d$



$$EI_c \cdot w_M^{D} = \frac{1}{6} \cdot (-60) \cdot 2^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega'_D = -40\omega'_D$$

$$w_M^{D} = \frac{-40\omega'_D}{EI_c} = \frac{-40\omega'_D}{10000} = -0{,}004\omega'_D \text{ m} = -4\omega'_D \text{ mm}$$

$$EI_c \cdot w_M^{P} = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5 \cdot 2^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_{P1} = 3{,}333\omega_{P1}$$

$$w_M^{P} = \frac{3{,}333\omega_{P1}}{EI_c} = \frac{3{,}333\omega_{P1}}{10000} = 0{,}0003333\omega_{P1} \text{ m}$$

$$= 0{,}3333\omega_{P1} \text{ mm}$$

Tabelle 1.12 Ermittlung der Verformung im Bereich $b-c$ in mm

	0	1	2	3	4
w_E	12,74	9,551	6,368	3,184	0
$\omega_D \cdot 10^4$	0	2344	3750	3281	0
$w_M^{D1} = -16\omega_D$	0	-3,750	-6,000	-5,250	0
$\omega_D \cdot 10^4$	0	3281	3750	2344	0
$w_M^{D2} = 9{,}143\omega'_D$	0	3,000	3,428	2,143	0
	12,74	8,801	3,796	0,077	0

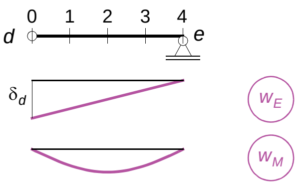
Tabelle 1.13 Ermittlung der Verformung im Bereich $c-d$ in mm

	0	1	2
w_E	0	6,365	12,73
$\omega_D \cdot 10^4$	0	3750	0
$w_M^{D} = -4\omega'_D$	0	-1,500	0
$\omega_{P1} \cdot 10^4$	0	3125	0
$w_M^{P} = 0{,}3333\omega_{P1}$	0	0,104	0
	0	4,949	12,73

- Bereich $d - e,\ n = 4$

$w = w_E + w_M$

Verformungsanteile im Bereich $d - e$



$$EI_c \cdot w_M^P = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 4^2 \cdot 2{,}0 \cdot \omega_{P1} = 106{,}66\omega_{P1}$$

$$w_M^P = \frac{106{,}66\omega_{P1}}{EI_c} = \frac{106{,}66\omega_{P1}}{10000} = 0{,}010666\omega_{P1}\ \text{m}$$

$$= 10{,}666\omega_{P1}\ \text{mm}$$

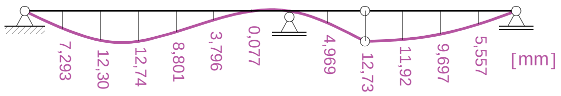
Tabelle 1.14 Ermittlung der Verformung im Bereich $d - e$ in mm

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
w_E	12,73	9,546	6,364	3,182	0
$\omega_{P1} \cdot 10^4$	0	2227	3125	2227	0
$w_M^P = 10{,}666\omega_{P1}$	0	2,375	3,333	2,375	0
	12,73	11,92	9,697	5,557	0

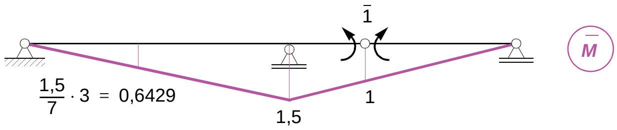
Tabelle 1.15 Auswertung der Arbeitsgleichung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M	$\bar{M}$	$\frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$	**Ergebnis**
$a - b$	2,0	3,0	⊕ 34,29	⊕ 0,6429	$2{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}6429 \cdot 34{,}29$	44,09
$b - c$	1,0	4,0	⊕ 34,29; ⊖ 60	0,6429 ⊕ 1,5	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot [0{,}6429 \cdot (2 \cdot 34{,}29 - 60)$ $+ 1{,}5 \cdot (2 \cdot (-60) + 34{,}29)]$	–82,03
$c - d$	1,0	2,0	60 ⊖	1,5 ⊕ 1	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-60) \cdot (2 \cdot 1{,}5 + 1)$	–80
			⊕ 2,5	1,5 ⊕ 1	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}5 \cdot (1{,}5 + 1)$	4,17
$d - e$	2,0	4,0	⊕ 10	1 ⊕	$2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10$	26,67
						–87,10

- Darstellung der Biegelinie



2. Die Relativdrehung der Tangenten (Knick) im Punkt d infolge der angegeben Belastung.



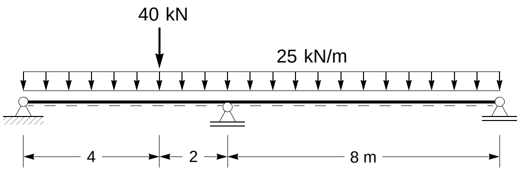
$$\bar{1} \cdot \Delta\varphi'_d = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung in *Tabelle 1.15* ergibt

$$\Delta\varphi'_d = -87{,}10 \Rightarrow \Delta\varphi_d = \frac{-87{,}10}{10000}\ \text{rad} = (-0{,}00871)\ \text{rad}$$

Das Minuszeichen bedeutet: entgegen der Richtung des angesetzten virtuellen Doppelmoments.

Aufgabe 2.1



$EI = \text{konst.} = 20000\ \text{kNm}^2$
$h = 0{,}30\ \text{m}$
$\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

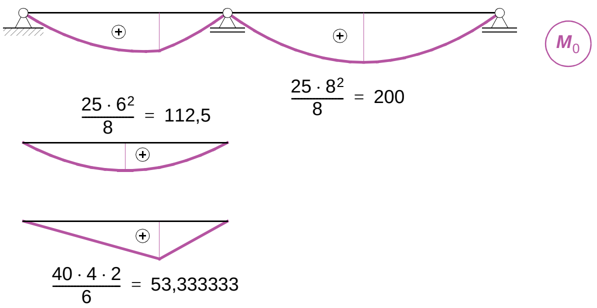
1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

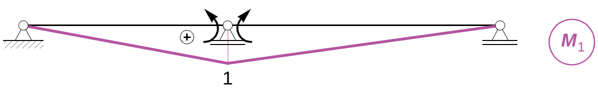
Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch das Einlegen eines Momentengelenks am mittleren Auflager entstehen zwei Einfeldbalken.

- Lastspannungszustand

Die Momentenlinie im Bereich des linken Feldes wird in die beiden Anteile infolge der Streckenlast und der Einzelkraft zerlegt.



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c / I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{10} = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 112{,}5 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 53{,}33 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$$
$$+ 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 200 = 847{,}22$$

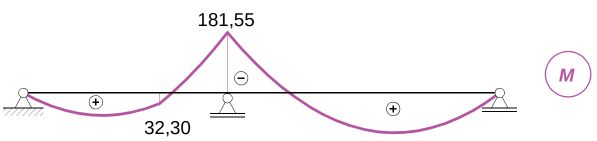
$$\delta'_{11} = (8+6) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 4{,}667$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{847{,}22}{4{,}667} = -181{,}55$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$

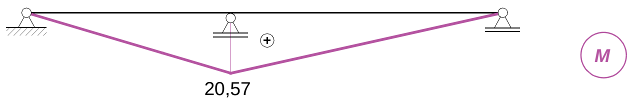


2. Die Momentenlinie infolge einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 30°$ (oben wärmer) im rechten Feld.

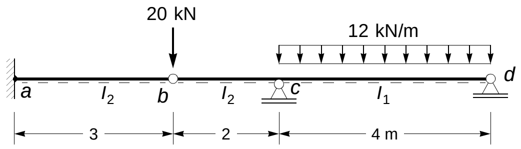
$$\delta'_{10} = EI_c \int M_1\, \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\, dx = -20000 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{30}{0{,}3}$$
$$= -96$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-96}{4{,}667} = 20{,}57$$



Aufgabe 2.2



$EI_c = \text{konst.} = 8000\ \text{kNm}^2$ $\quad \frac{I_c}{I_1} = 1{,}5 \quad \frac{I_c}{I_2} = 1$

1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

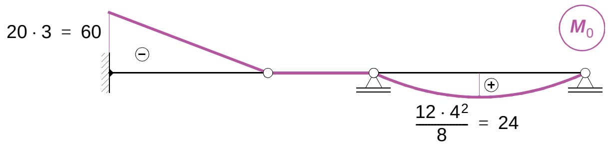
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Nach dem Abzählkriterium ergibt sich:

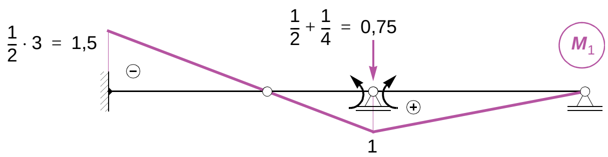
$n = a + z - 3p = 5 + 2 - 3 \cdot 2 = 1$

Es wird ein Momentengelenk im Punkt c eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

$$\delta'_{10} = 1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}5 \cdot 60 + 1{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 24 = 138$$

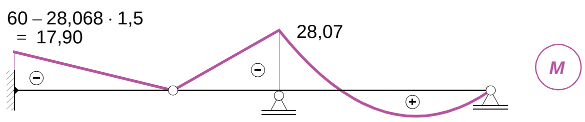
$$\delta'_{11} = 1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}5^2 + 1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 4{,}914$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{138}{4{,}914} = -28{,}068$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$

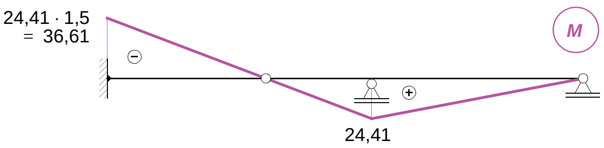


2. Die Momentenlinie infolge einer Absenkung des mittleren Auflagers um 2 cm.

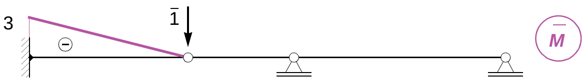
$$\delta'_{10} = -EI_c\left[C_1\delta_c\right] = -8000 \cdot [0{,}75 \cdot 0{,}02] = -120$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-120}{4{,}914} = 24{,}41$$



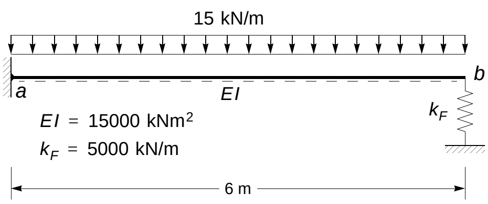
3. Die Verschiebung des Gelenkpunktes infolge der angegebenen Belastung.



$$\bar{1} \cdot \delta'_b = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx = 1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 17{,}90 = 53{,}695$$

$$\Rightarrow \delta_b = \frac{53{,}695}{8000} = 0{,}006712 \text{ m} = 6{,}712 \text{ mm}$$

Aufgabe 2.3

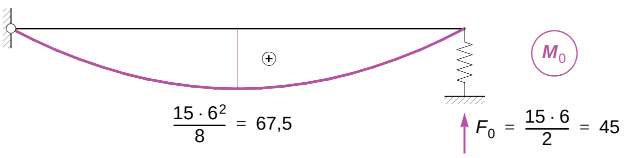


1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

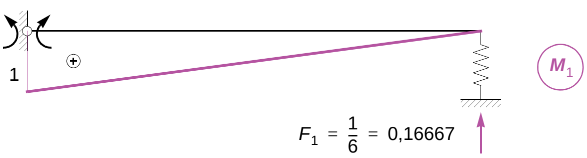
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch Einlegen eines Momentengelenks im Punkt *a* entsteht ein Balken auf zwei Stützen.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0\,dx + EI_c\frac{F_1F_0}{k_F}$$

$$= 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 67{,}5 + 15000 \cdot \frac{0{,}16667 \cdot 45}{5000} = 157{,}5$$

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2\,dx + EI_c\frac{F_1^2}{k_F}$$

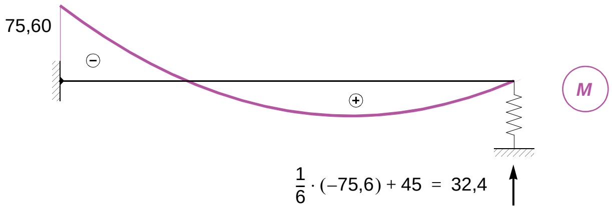
$$= 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 15000 \cdot \frac{0{,}16667^2}{5000} = 2{,}0833$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{157{,}5}{2{,}0833} = -75{,}6$$

- Endgültige Momentenlinie

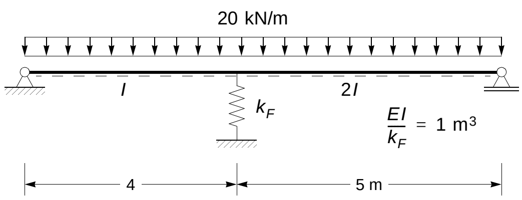
$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$



2. Die Verschiebung des Punktes *b*.

$$F = k_F \cdot w \Rightarrow w = \frac{F}{k_F} = \frac{32{,}4}{5000} = 0{,}00648 \text{ m} = 6{,}48 \text{ mm}$$

Aufgabe 2.4



Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

$I_c = 2I$

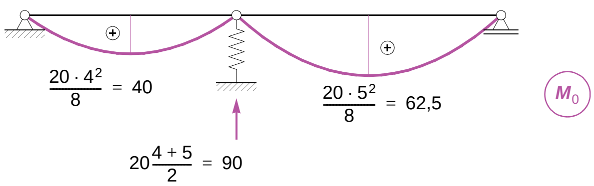
linkes Feld: $\frac{I_c}{I} = 2$, rechtes Feld: $\frac{I_c}{I} = 1$

$$\frac{EI_c}{k_F} = 2\frac{EI}{k_F} = 2 \text{ m}^3$$

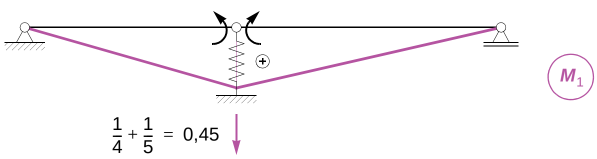
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch das Einlegen eines Momentengelenks am mittleren Auflager entstehen zwei Einfeldbalken.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 \, dx + EI_c \frac{F_1 F_0}{k_F}$$

$$= 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 40 + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 62{,}5 - 2 \cdot 0{,}45 \cdot 90$$

$$= 129{,}833$$

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2 \, dx + EI_c \frac{F_1^2}{k_F}$$

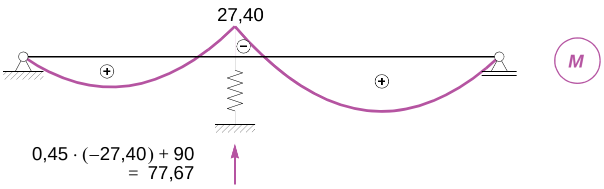
$$= 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2 \cdot 0{,}45^2 = 4{,}73833$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

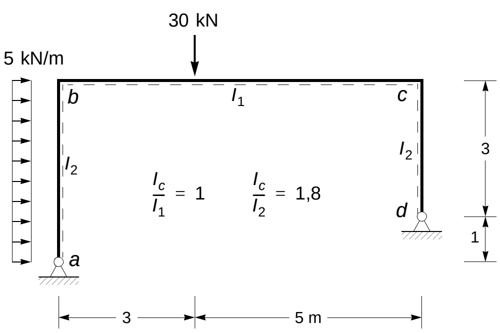
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{129{,}833}{4{,}73833} = -27{,}40$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$



Aufgabe 2.5



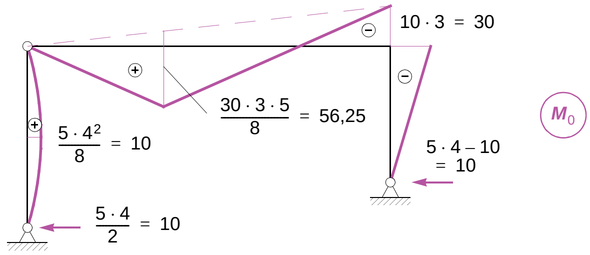
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Durch Einlegen eines Momentengelenks im Punkt *b* entsteht ein Dreigelenkrahmen. Das System ist einfach statisch unbestimmt.

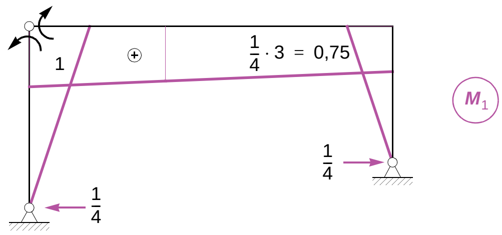
- Lastspannungszustand

Für den linken, beidseitig gelenkigen Stiel kann die Momentenlinie als $q \cdot l^2 / 8$ -Parabel sofort angegeben werden. Daraus folgt die horizontale Auflagerkraft im Punkt *a*. Aus der horizontalen Kräftesumme ergibt sich die horizontale Auflagerkraft im Punkt *b* und damit die Momentenlinie im rechten Stiel und im Riegel.



- Einheitsspannungszustand

Hier ergibt sich die horizontale Auflagerkraft im Punkt *a* aus der Querkraft des linken Stiel. Die horizontale Auflagerkraft im Punkt *b* ist entgegengesetzt gleich. Damit kann die gesamte Momentenlinie angegeben werden.



- δ-Werte

Die Auswertung der Arbeitsgleichung erfolgt in den *Tabellen 2.1* und *2.2*.

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{82{,}72}{9{,}5792} = -8{,}635$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$

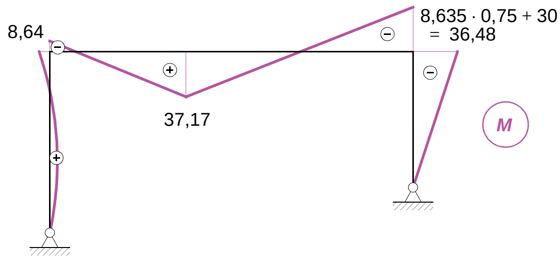


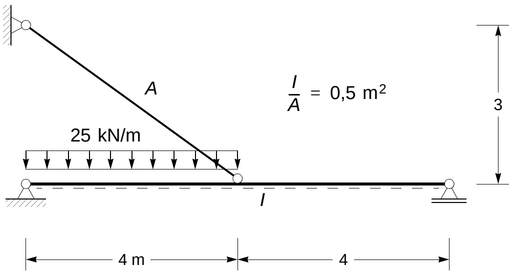
Tabelle 2.1 Berechnung von δ'_{11}

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2 \, dx$	
a – b	1,8	4,0	1	$1{,}8 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2$	2,4000
b – c	1,0	8,0	1 … 0,75	$1{,}0 \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1^2 + 1 \cdot 0{,}75 + 0{,}75^2)$	6,1667
c – d	1,8	3,0	0,75	$1{,}8 \cdot 3{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2$	1,0125
					9,5792

Tabelle 2.2 Berechnung von δ'_{10}

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	M_0	$\frac{I_c}{I}\int M_1 M_0\, dx$	
$a-b$	1,8	4,0	⊕ 1	⊕ 10	$1{,}8 \cdot 4{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10$	24,00
$b-c$	1,0	8,0	1 ⊕ 0,75	⊖ 30	$1{,}0 \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-30) \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}75)$	–100,00
			1 ⊕ 0,75	⊕ 56,25	$1{,}0 \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 56{,}25 \cdot \left[1 \cdot \left(1 + \frac{5}{8}\right) + 0{,}75 \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right)\right]$	199,22
$c-d$	1,8	3,0	0,75 ⊕	30 ⊖	$1{,}8 \cdot 3{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot (-30)$	–40,50
						82,72

Aufgabe 2.6

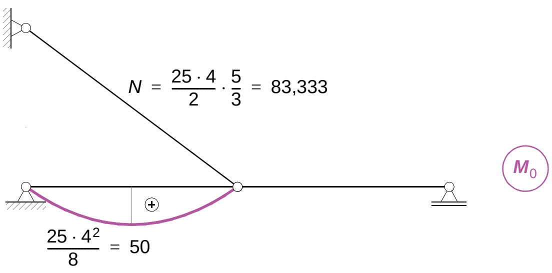


Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

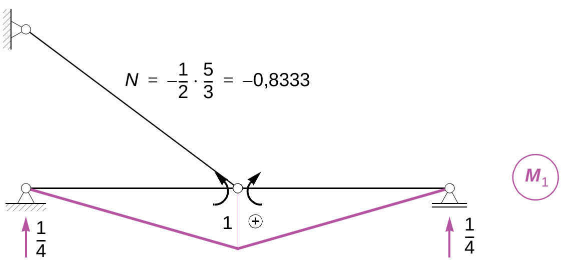
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Zur Bildung des Hauptsystems wird ein Gelenk in der Mitte des Balkens eingelegt. Dadurch entstehen zwei beidseitig gelenkige Balken.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 dx + \frac{I_c}{A}\int N_1 N_0 dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot (-0{,}8333) \cdot 83{,}33$$

$$= 66{,}667 - 173{,}611 = -106{,}944$$

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2 dx + \frac{I_c}{A}\int N_1^2 dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot (-0{,}8333)^2$$

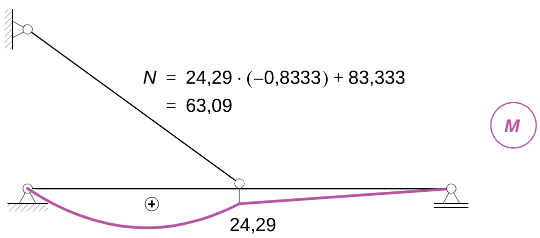
$$= 2{,}6667 + 1{,}7361 = 4{,}40278$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

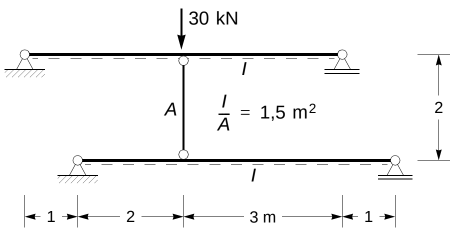
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-106{,}944}{4{,}40278} = 24{,}29$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$



Aufgabe 2.7



EI = konst. = 20000 kNm²

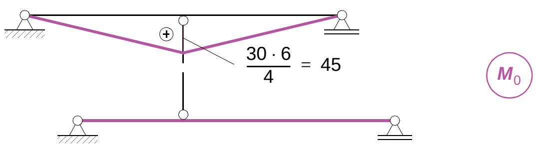
$\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

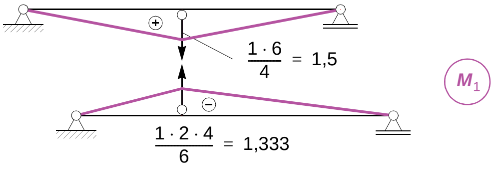
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Zur Bildung des Hauptsystems wird der Pendelstab geschnitten.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 \,dx + \frac{I_c}{A}\int N_1 N_0 \,dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}5 \cdot 45 + 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 135$$

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2 \,dx + \frac{I_c}{A}\int N_1^2 \,dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}5^2 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}333^2 + 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1^2$$

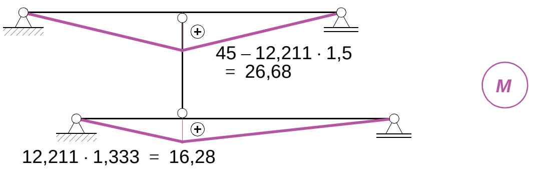
$$= 8{,}0556 + 3 = 11{,}0556$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{135}{11{,}0556} = -12{,}211$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + M_0$



2. Die Momentenlinie infolge einer gleichmäßigen Erwärmung des Pendelstabes um $T_0 = 40°$.

$$\delta'_{10} = EI_c \int N_1 \, \alpha_T \, T_0 \,dx$$

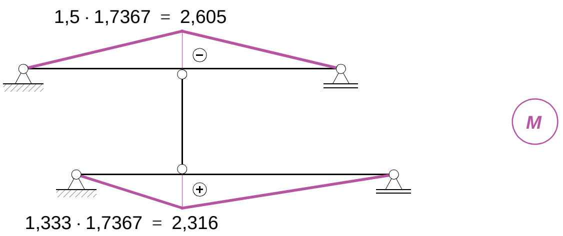
$$= 20000 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 19{,}2$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

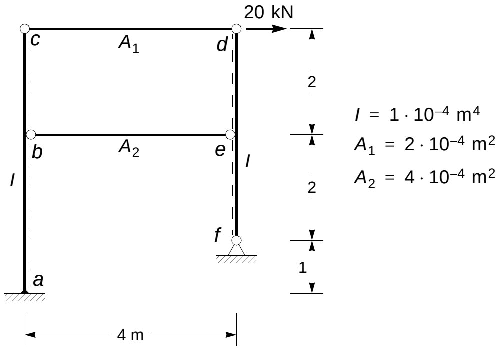
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{19{,}2}{11{,}0556} = -1{,}7367$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 \;\; (M_0 = 0)$



Aufgabe 2.8



Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

$$\frac{I_c}{A_1} = 0{,}5 \text{ m}^2 \qquad \frac{I_c}{A_2} = 0{,}25 \text{ m}^2$$

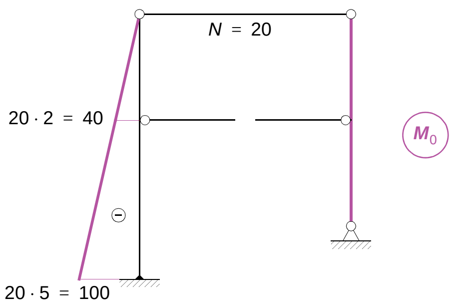
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Zur Anwendung des Abzählkriteriums werden beide Pendelstäbe als einwertige Bindung betrachtet und nicht als Scheibe mitgezählt. Damit ergibt sich:

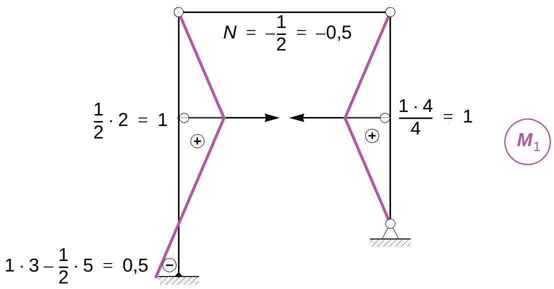
$n = 5 + 2 - 3 \cdot 2 = 1$

Zur Bildung des statisch bestimmten Hauptsystems wird der untere Pendelstab geschnitten.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Die Auswertung der Arbeitsgleichung erfolgt in *Tabelle 2.3* und *2.4*.

Tabelle 2.3 Berechnung von δ'_{10}, Anteile aus Biegung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	M_0	$\frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 \,\mathrm{d}x$	
$a-b$	1,0	3,0	0,5 ⊖ ⊕ 1	100 ⊖ 40	$1{,}0\cdot 3\cdot \frac{1}{6}\cdot[-0{,}5\cdot(2\cdot(-100)-40)+1\cdot(2\cdot(-40)-100)]$	–30,000
$b-c$	1,0	2,0	1 ⊕	40 ⊖	$1{,}0\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-40)$	–26,667
						–56,667

Anteil der Normalkraftverformung:

$$\frac{I_c}{A}\int N_1 N_0 \,\mathrm{d}x = 0{,}5\cdot 4\cdot(-0{,}5)\cdot 20 = -20$$

$$\delta'_{10} = -56{,}667-20 = -76{,}667$$

Tabelle 2.4 Berechnung von δ'_{11}, Anteile aus Biegung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2 \,\mathrm{d}x$	
$a-b$	1,0	3,0	0,5 ⊖ ⊕ 1	$1{,}0\cdot 3\cdot \frac{1}{3}\cdot((-0{,}5)^2+(-0{,}5)\cdot 1+1^2)$	0,7500
$b-c$	1,0	2,0	1 ⊕	$1{,}0\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\cdot 1^2$	0,6667
$d-e$	1,0	2,0	⊕ 1	$1{,}0\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\cdot 1^2$	0,6667
$e-f$	1,0	2,0	1 ⊕	$1{,}0\cdot 2\cdot \frac{1}{3}\cdot 1^2$	0,6667
					2,7500

Anteil der Normalkraftverformung:

$$\frac{I_c}{A}\int N_1^2 \,\mathrm{d}x = 0{,}5\cdot 4\cdot(-0{,}5)^2+0{,}25\cdot 4\cdot 1^2 = 1{,}5$$

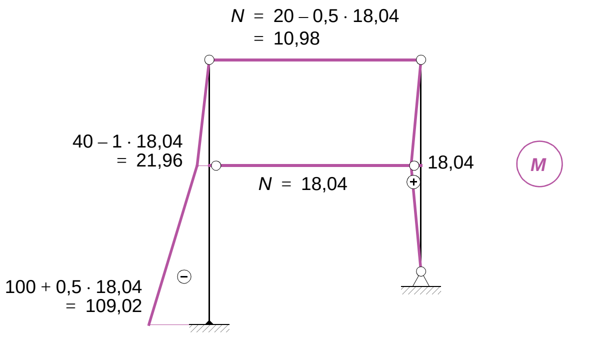
$$\delta'_{11} = 2{,}75+1{,}5 = 4{,}25$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

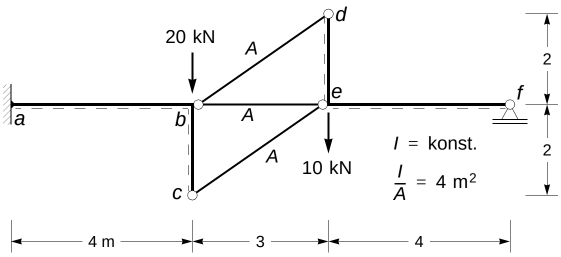
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-76{,}667}{4{,}25} = 18{,}04$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1\cdot M_1 + M_0$$



Aufgabe 2.9



Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

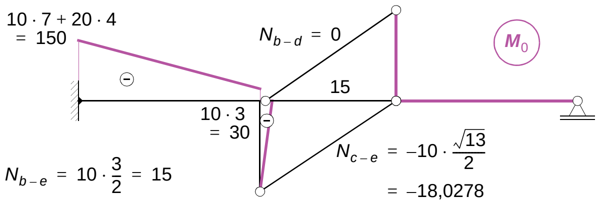
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Grad der statischen Unbestimmtheit nach dem Abzählkriterium: Die Pendelstäbe werden als einwertige Bindung gezählt ($z = 3$). Damit verbleiben zwei Scheiben.

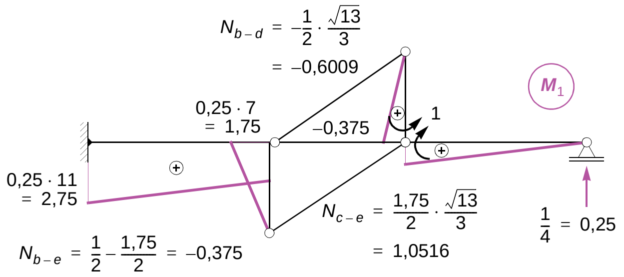
$$n = 4+3-3\cdot 2 = 1$$

Um das statisch bestimmte Hauptsystem zu bilden, wird ein Momentengelenk im Punkt e eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Die Auswertung der Arbeitsgleichung erfolgt in den *Tabellen 2.5* bis *2.8*.

Tabelle 2.5 Berechnung von δ'_{10}, Anteile aus Biegung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	M_0	$\frac{I_c}{I}\int M_1 M_0\,dx$	
$a-b$	1,0	4,0	2,75 ⊕ 1,75	150 ⊖ 30	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot [2{,}75 \cdot (2 \cdot (-150) - 30) + 1{,}75 \cdot (2 \cdot (-30) - 150)]$	–850
$b-c$	1,0	2,0	1,75 ⊕	30 ⊖	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}75 \cdot (-30)$	–35
						–885

Tabelle 2.6 Berechnung von δ'_{10}, Anteile aus Dehnung

Stab	$\frac{I_c}{A}$	l	N_1	N_0	$\frac{I_c}{A} \cdot N_1 \cdot N_0 \cdot l$	
$c-e$	4,0	$\sqrt{13}$	1,0516	–18,0278	$4{,}0 \cdot 1{,}0516 \cdot (-18{,}0278) \cdot \sqrt{13}$	–273,421
$b-e$	4,0	3,0	–0,375	15	$4{,}0 \cdot (-0{,}375) \cdot 15 \cdot 3$	–67,500
						–340,921

$$\delta'_{10} = -885 - 340{,}92097 = -1225{,}921$$

Tabelle 2.7 Berechnung von δ'_{11}, Anteile aus Biegung

Bereich	$\frac{I_c}{I}$	l	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2\,dx$	
$a-b$	1,0	4,0	2,75 ⊕ 1,75	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2{,}75^2 + 2{,}75 \cdot 1{,}75 + 1{,}75^2)$	20,5833
$b-c$	1,0	2,0	1,75 ⊕	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}75^2$	2,0417
$d-e$	1,0	2,0	⊕ 1	$1{,}0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2$	0,6667
$e-f$	1,0	4,0	1 ⊕	$1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2$	1,3333
					24,625

Tabelle 2.8 Berechnung von δ'_{11}, Anteile aus Dehnung

Stab	$\frac{I_c}{A}$	l	N_1	$\frac{I_c}{A} \cdot N_1^2 \cdot l$	
$c-e$	4,0	$\sqrt{13}$	1,0516	$4{,}0 \cdot 1{,}0516^2 \cdot \sqrt{13}$	15,9496
$b-e$	4,0	3,0	–0,375	$4{,}0 \cdot (-0{,}375)^2 \cdot 3$	1,6875
$b-d$	4,0	$\sqrt{13}$	–0,6009	$4{,}0 \cdot (-0{,}6009)^2 \cdot \sqrt{13}$	5,2080
					22,8451

$$\delta'_{11} = 24{,}625 + 22{,}8451 = 47{,}4701$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

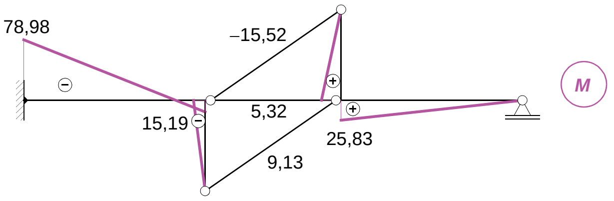
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-1225{,}921}{47{,}4701} = 25{,}825$$

- Endgültige Momentenlinie und Normalkräfte

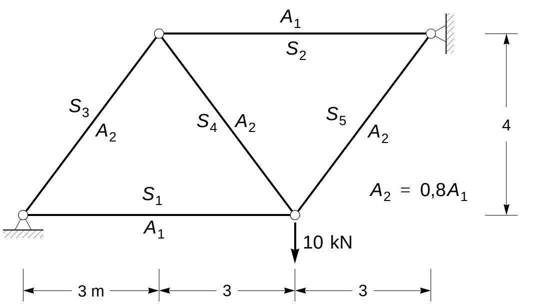
$$M = X_1 \cdot M_1 + M_0\,,\; N = X_1 \cdot N_1 + N_0$$

$$M_a = 25{,}825 \cdot 2{,}75 - 150 = -78{,}98$$
$$M_b = 25{,}825 \cdot 1{,}75 - 30 = 15{,}19$$
$$M_e = 25{,}825 \cdot 1 + 0 = 25{,}83$$

$$N_{b-d} = 25{,}825 \cdot (-0{,}6009) + 0 = -15{,}52$$
$$N_{b-e} = 25{,}825 \cdot (-0{,}375) + 15 = 5{,}32$$
$$N_{c-e} = 25{,}825 \cdot 1{,}0516 - 18{,}0278 = 9{,}13$$



Aufgabe 2.10



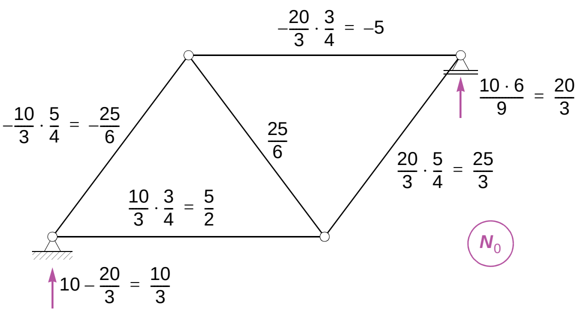
Die Stabkräfte infolge der angegebenen Belastung.

$$\frac{A_c}{A_1} = 1 \qquad \frac{A_c}{A_2} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

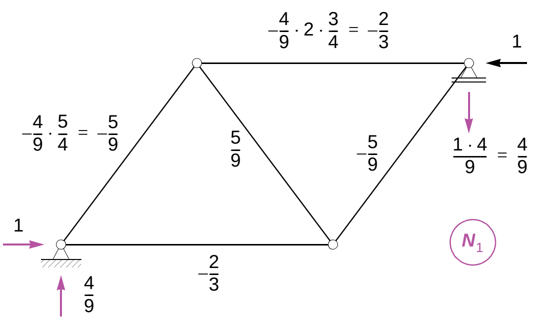
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das Fachwerksystem ist innerlich statisch bestimmt (Aufbauprinzip) und bildet eine Scheibe, die äußerlich statisch unbestimmt ist (vier unbekannte Auflagerreaktionen). Das statisch bestimmte Hauptsystem folgt durch das Lösen der horizontalen Festhaltung am rechten Auflager.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Da ein Fachwerksystem vorliegt, ergeben sich die δ-Werte mit:

$$\delta'_{jk} = \sum \frac{A_c}{A} N_j N_k l$$

Die Auswertung der Arbeitsgleichung erfolgt in den *Tabellen 2.9* und *2.10*.

Tabelle 2.9 Berechnung von δ'_{11}

Stab	$\frac{A_c}{A}$	l	N_1	$\frac{A_c}{A} \cdot N_1^2 \cdot l$	
S_1	1,0	6,0	$-\frac{2}{3}$	$1{,}0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 6$	2,6667
S_2	1,0	6,0	$-\frac{2}{3}$	$1{,}0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 6$	2,6667
S_3	1,25	5,0	$-\frac{5}{9}$	$1{,}25 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 5$	1,9290
S_4	1,25	5,0	$\frac{5}{9}$	$1{,}25 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 5$	1,9290
S_5	1,25	5,0	$-\frac{5}{9}$	$1{,}25 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 5$	1,9290
					11,1204

Tabelle 2.10 Berechnung von δ'_{10}

Stab	$\frac{A_c}{A}$	l	N_1	N_0	$\frac{A_c}{A} \cdot N_1 \cdot N_0 \cdot l$	
S_1	1,0	6,0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	$1{,}0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot 6$	–10,0000
S_2	1,0	6,0	$-\frac{2}{3}$	–5	$1{,}0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-5) \cdot 6$	20,0000
S_3	1,25	5,0	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{25}{6}$	$1{,}25 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{25}{6}\right) \cdot 5$	14,4676
S_4	1,25	5,0	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{6}$	$1{,}25 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{25}{6} \cdot 5$	14,4676
S_5	1,25	5,0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{25}{3}$	$1{,}25 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \frac{25}{3} \cdot 5$	–28,9352
						10,0000

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{10}{11{,}1204} = -0{,}89925$$

- Endgültige Normalkräfte

$$N = X_1 \cdot N_1 + N_0$$

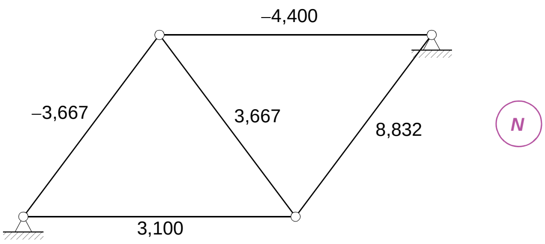
$$S_1 = -0{,}89925 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{2} = 3{,}100$$

$$S_2 = -0{,}89925 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 5 = -4{,}400$$

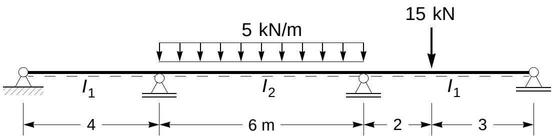
$$S_3 = -0{,}89925 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) - \frac{25}{6} = -3{,}667$$

$$S_4 = -0{,}89925 \cdot \frac{5}{9} + \frac{25}{6} = 3{,}667$$

$$S_5 = -0{,}89925 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) + \frac{25}{3} = 8{,}832$$



Aufgabe 2.11



$l_2 = 1{,}2 l_1$

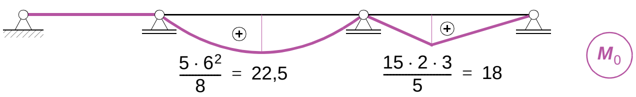
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

$$\frac{I_c}{I_2} = 1 \qquad \frac{I_c}{I_1} = 1{,}2$$

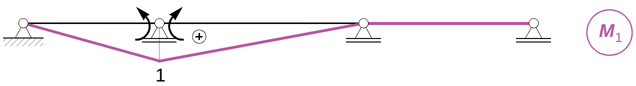
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

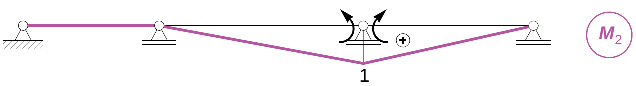
Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Durch Entfernen der inneren Auflager entsteht ein Einfeldbalken (Abbauprinzip). Um das Hauptsystem zu bilden, werden an den inneren Auflager Momentengelenke eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

$$\delta'_{11} = 1{,}2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 3{,}6$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\delta'_{22} = 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1{,}2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 4$$

$$\delta'_{10} = 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 22{,}5 = 45$$

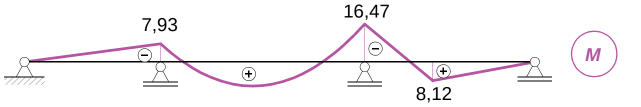
$$\delta'_{20} = 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 22{,}5 + 1{,}2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 18 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = 73{,}8$$

- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

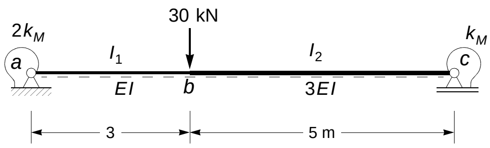
$$\begin{bmatrix} 3{,}6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45 \\ 73{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}9254 \\ -16{,}4687 \end{bmatrix}$$

- Endgültige Momentenlinie

Die berechneten X-Werte entsprechen den Momenten an den inneren Auflagern.



Aufgabe 2.12



$$\frac{EI}{k_M} = 2\text{ m}$$

Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

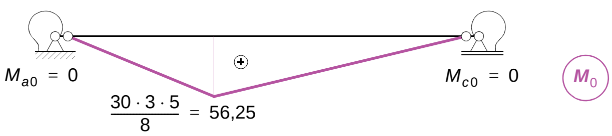
$$\frac{I_c}{I_2} = 1 \qquad \frac{EI_c}{k_M} = \frac{3EI}{k_M} = 3 \cdot 2\text{ m} = 6\text{ m}$$

$$\frac{I_c}{I_1} = 3 \qquad \frac{EI_c}{2k_M} = \frac{3EI}{2k_M} = \frac{3}{2} \cdot 2\text{ m} = 3\text{ m}$$

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

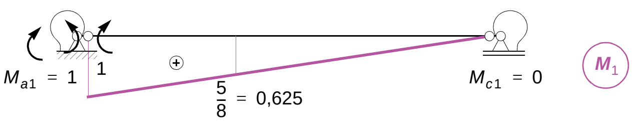
Da der Träger an den beiden Endpunkten drehelastisch gelagert ist, wirken dort Auflagermomente in der Drehfeder. Daher gibt es zusätzlich zu den drei Auflagerkräften des einfachen Balkens zwei unbekannte Auflagermomente. Das System ist also zweifach statisch unbestimmt. Als statisch bestimmtes Hauptsystem wird der beidseitig gelenkige Balken gewählt.

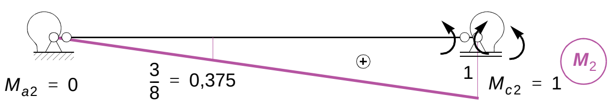
- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustände

Es wird an Enden des Balkens jeweils ein Doppelmoment angesetzt. Eine Hälfte des Doppelmoments wirkt auf den Balken, der andere Teil erzeugt ein Moment in der Drehfeder.





- δ-Werte

Die nachfolgend farbig gekennzeichneten Größen sind gleich null und die entsprechenden Terme entfallen.

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2 dx + \frac{EI_c}{k_M}(M_{a1}^2 + M_{c1}^2)$$

$$= 3{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1^2 + 1 \cdot 0{,}625 + 0{,}625^2) + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}625^2 + 3 \cdot 1^2 = 9{,}6979$$

$$\delta'_{12} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_2 dx + \frac{EI_c}{k_M}(M_{a1} \cdot M_{a2} + M_{c1} \cdot M_{c2})$$

$$= 3{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}375 \cdot (2 \cdot 0{,}625 + 1) + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}625 \cdot (2 \cdot 0{,}375 + 1) = 2{,}1771$$

$$\delta'_{22} = \frac{I_c}{I}\int M_2^2 dx + \frac{EI_c}{k_M}(M_{a2}^2 + M_{c2}^2)$$

$$= 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1^2 + 1 \cdot 0{,}375 + 0{,}375^2) + 3{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}375^2 + 6 \cdot 1^2 = 8{,}9479$$

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 dx + \frac{EI_c}{k_M}(M_{a1} \cdot M_{a0} + M_{c1} \cdot M_{c0})$$

$$= 3{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 56{,}25 \cdot (2 \cdot 0{,}625 + 1) + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}625 \cdot 56{,}25 = 248{,}4375$$

$$\delta'_{20} = \frac{I_c}{I}\int M_2 M_0 dx + \frac{EI_c}{k_M}(M_{a2} \cdot M_{a0} + M_{c2} \cdot M_{c0})$$

$$= 3{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}375 \cdot 56{,}25 + 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 56{,}25 \cdot (2 \cdot 0{,}375 + 1) = 145{,}3125$$

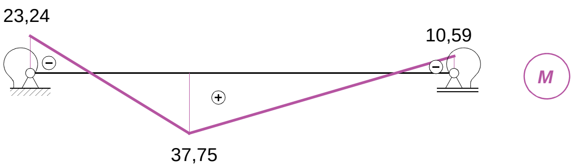
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 9{,}6979 & 2{,}1771 \\ 2{,}1771 & 8{,}9479 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 248{,}4375 \\ 145{,}3125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23{,}241 \\ -10{,}585 \end{bmatrix}$$

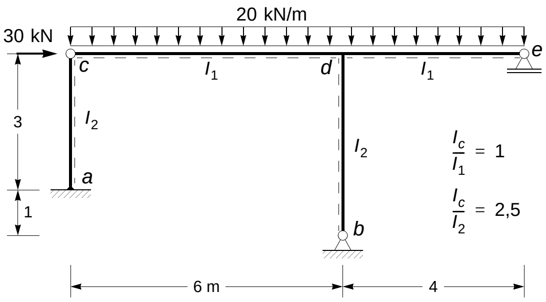
- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_0$

Die berechneten X-Werte entsprechen den Momenten an den Stabenden.



Aufgabe 2.13

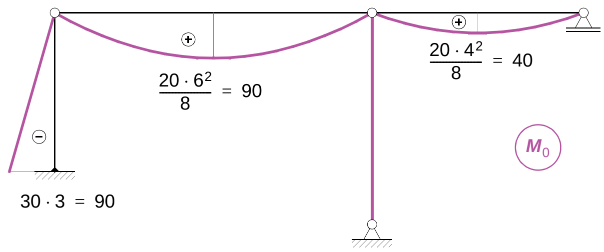


Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

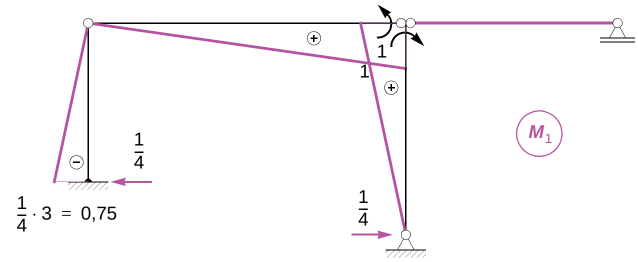
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

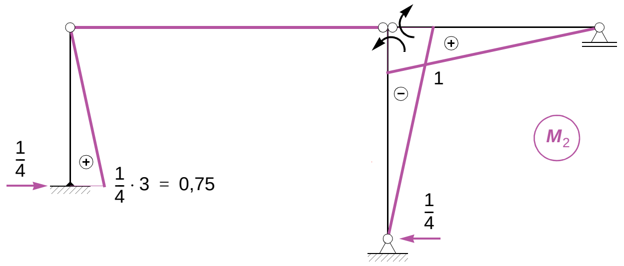
Grad der statischen Unbestimmtheit nach dem Abzählkriterium: $n = 6 + 2 - 3 \cdot 2 = 2$. Zur Bildung des Hauptsystems werden zwei Momentengelenke links und rechts vom Punkt d eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

$$\delta'_{jk} = \frac{I_c}{I}\int M_j M_k dx$$

$$\delta'_{11} = 2{,}5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 6{,}7396$$

$$\delta'_{12} = -2{,}5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 - 2{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = -4{,}7396$$

$$\delta'_{22} = 2{,}5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 + 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 6{,}0729$$

$$\delta'_{10} = 2{,}5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 90 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 90 = 348{,}75$$

$$\delta'_{20} = -2{,}5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 90 + 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 40 = -115{,}4167$$

- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

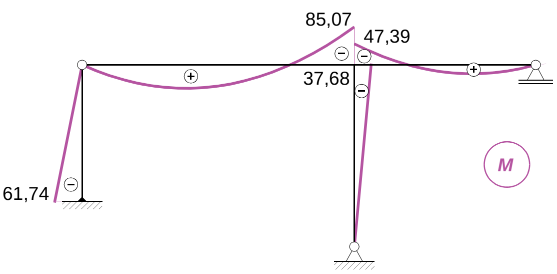
$$\begin{bmatrix} 6{,}7396 & -4{,}7396 \\ -4{,}7396 & 6{,}0729 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 348{,}7500 \\ -115{,}4167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85{,}073 \\ -47{,}390 \end{bmatrix}$$

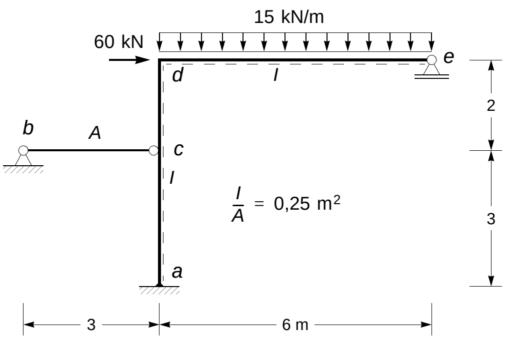
- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_0$

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_{dc} \\ M_{de} \\ M_{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}75 & 0{,}75 & -90 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -85{,}073 \\ -47{,}390 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61{,}74 \\ -85{,}07 \\ -47{,}39 \\ -37{,}68 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 2.14



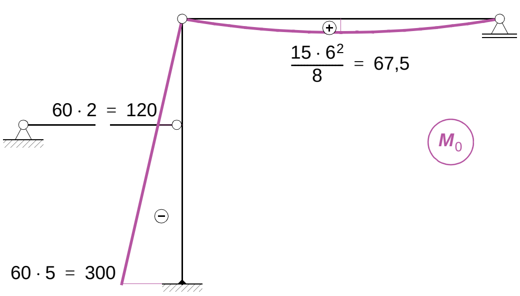
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

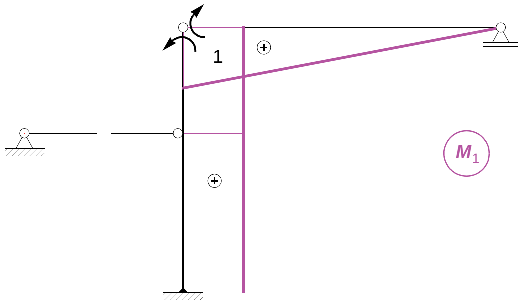
Durch das Entfernen des Pendelstabs b – c (einwertige Bindung) und des einwertigen Auflagers im Punkt e entsteht ein abgeknickter Kragträger, der ein statisch bestimmtes und unverschiebliches Grundsystem darstellt. Da durch das Lösen von zwei Bindungen ein statisch bestimmtes System entsteht, ist der Grad der statischen Unbestimmtheit gleich zwei (Abbauprinzip).

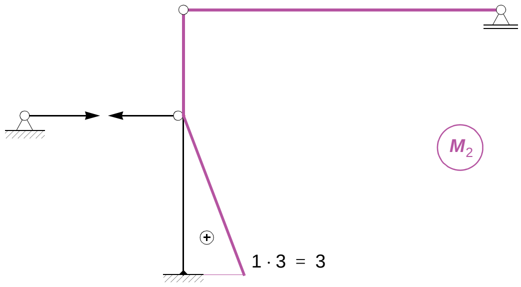
Um das statisch bestimmte Hauptsystem zu bilden, wird der Stab b – c geschnitten und ein Momentengelenk im Punkt d eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

Die nachfolgend farbig gekennzeichneten Größen sind gleich null und die entsprechenden Integrale entfallen.

$$\delta'_{11} = \frac{I_c}{I}\int M_1^2 dx + \frac{I_c}{A}\int N_1^2 dx = 1{,}0 \cdot 5 \cdot 1^2 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 7$$

$$\delta'_{12} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_2 dx + \frac{I_c}{A}\int N_1 N_2 dx = 1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 4{,}5$$

$$\delta'_{22} = \frac{I_c}{I}\int M_2^2 dx + \frac{I_c}{A}\int N_2^2 dx$$

$$= 1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^2 + 0{,}25 \cdot 3 \cdot 1^2 = 9{,}75$$

$$\delta'_{10} = \frac{I_c}{I}\int M_1 M_0 dx + \frac{I_c}{A}\int N_1 N_0 dx$$

$$= -1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 300 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 67{,}5 = -615$$

$$\delta'_{20} = \frac{I_c}{I}\int M_2 M_0 dx + \frac{I_c}{A}\int N_2 N_0 dx$$

$$= -1{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot (2 \cdot 300 + 120) = -1080$$

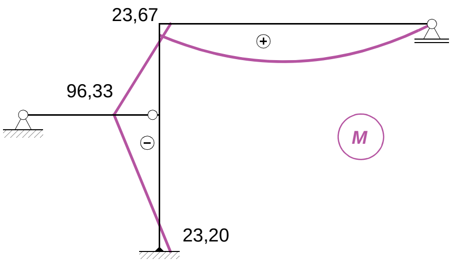
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 7 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & 9{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -615 \\ -1080 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23{,}67 \\ 99{,}84 \end{bmatrix}$$

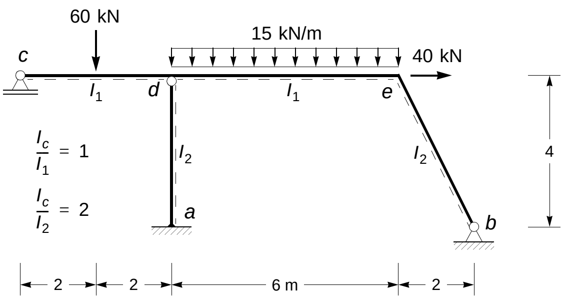
- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_0$

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_c \\ M_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -300 \\ 1 & 0 & -120 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23{,}67 \\ 99{,}84 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23{,}19 \\ -96{,}33 \\ 23{,}67 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 2.15



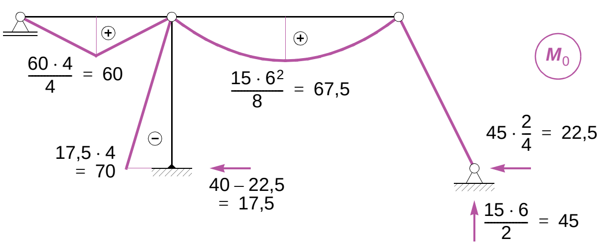
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

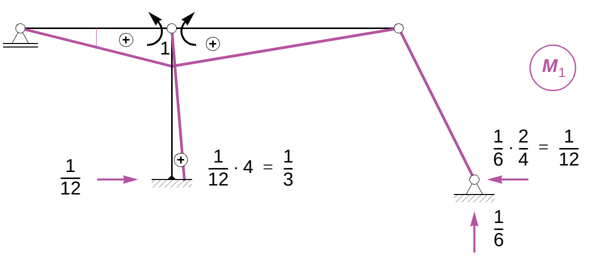
Das Abzählkriterium ergibt: $n = a + z - 3p = 6 + 2 - 3 \cdot 2 = 2$

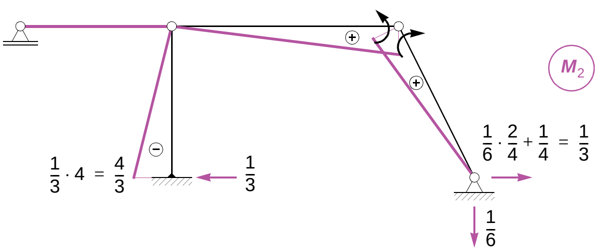
Zur Bildung des Hauptsystems werden Momentengelenke in den Punkten *d* und *e* eingelegt.

- Lastspannungszustand



- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

$$\delta'_{jk} = \frac{l_c}{l} \int M_j M_k \, dx$$

$$\delta'_{11} = 1{,}0 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}3333^2 = 3{,}6296$$

$$\delta'_{12} = -2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}3333 \cdot 1{,}3333 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = -0{,}18519$$

$$\delta'_{22} = 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}3333^2 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2{,}0 \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 9{,}7222$$

$$\delta'_{10} = -2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}3333 \cdot 70 + 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 60 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 67{,}5 = 132{,}778$$

$$\delta'_{20} = 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 70 + 1{,}0 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 67{,}5 = 383{,}889$$

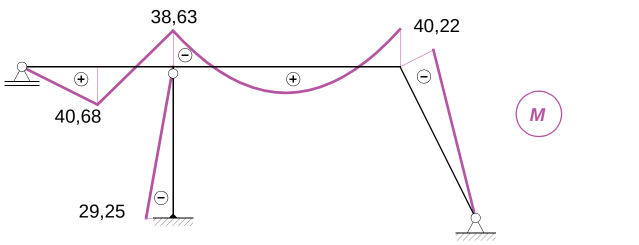
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 3{,}6296 & -0{,}18519 \\ -0{,}18519 & 9{,}7222 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 132{,}778 \\ 383{,}889 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38{,}63 \\ -40{,}22 \end{bmatrix}$$

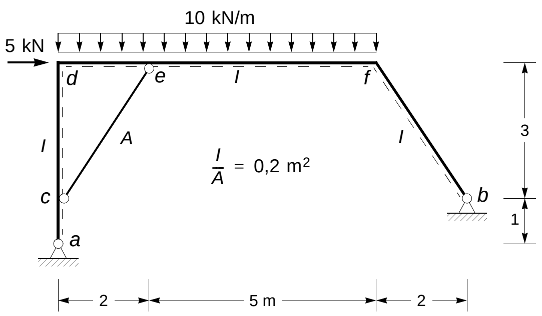
- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_0$

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_d \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3333 & -1{,}3333 & -70 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38{,}63 \\ -40{,}22 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29{,}25 \\ -38{,}63 \\ -40{,}22 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 2.16



Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Die statische Unbestimmtheit folgt z. B. nach dem Abbauprinzip. Durch das Schneiden des Pendelstabes *a* – *d* wird eine Bindung gelöst. Durch das Einlegen eines Momentengelenks im Riegel entsteht ein Dreigelenkrahmen, der statisch bestimmt und unverschieblich ist. Da zwei Bindungen gelöst werden müssen, um das System statisch bestimmt zu machen, ist $n = 2$. Zur Bildung des Hauptsystems wird der Pendelstab geschnitten und ein Momentengelenk im Punkt *f* eingelegt.

- Lastspannungszustand

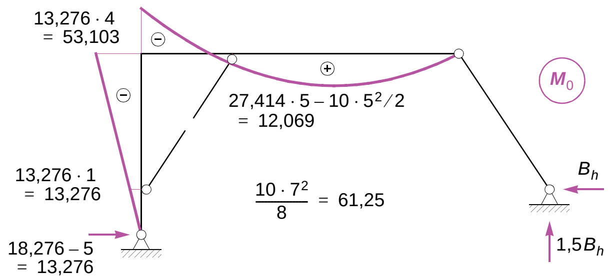
Es wird zunächst der schräge Pendelstab freigeschnitten und die Momentensumme um den Gelenkpunkt *f* gebildet.

$$\sum M_{(f)}^{\mathrm{TS,\,re}} = 0\colon \quad B_v \cdot 2 - B_h \cdot 3 = 0 \Rightarrow B_v = 1{,}5 B_h$$

Damit können die Auflagerkräfte im Punkt *b* mit der Momentensumme bezüglich des Auflagerpunktes *a* am Gesamtsystem berechnet werden.

$$\sum M_{(a)} = 0\colon \quad 1{,}5 B_h \cdot 9 + B_h \cdot 1 - 10 \cdot 7^2/2 - 5 \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow B_h = 18{,}276 \Rightarrow B_v = 27{,}414$$



- Einheitsspannungszustände

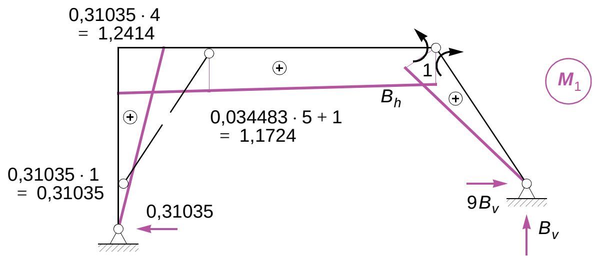
Es wird zunächst die Momentensumme bezüglich des Auflagerpunktes *a* am Gesamtsystem gebildet. Das Doppelmoment im Gelenkpunkt *f* ist in der Summe gleich null und geht in die Gleichung nicht ein.

$$\sum M_{(a)} = 0\colon \quad B_v \cdot 9 - B_h \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_h = 9 B_v$$

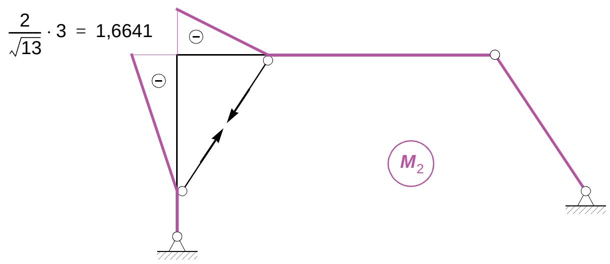
Durch Freischneiden des schräge Pendelstabs folgt aus der Momentensumme um den Gelenkpunkt *f*:

$$\sum M_{(f)}^{\mathrm{TS,\,re}} = 0\colon \quad B_v \cdot 2 + 9 B_v \cdot 3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow B_v = 0{,}034483 \Rightarrow B_h = 0{,}31035$$



Da der schräge Pendelstab im zweiten Einheitszustand unbelastet ist, muss die resultierende Auflagerkraft im Punkt *b* in Richtung der Stabachse wirken. Aus der Momentsumme bezüglich *a* folgt, dass die Auflagerkraft im Punkt *b* gleich null ist. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt, dass auch die Auflagerkraft im Punkt *a* gleich null ist. Die Momentenlinie ist daher auf den Bereich *c* – *d* – *e* beschränkt.



- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c/I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen. Die Auswertung der Arbeitsgleichung erfolgt in den *Tabellen 2.11* bis *2.15*. Die Momente wurden hier nicht vorzeichengerecht eingesetzt. Liegen die Momente auf derselben Seite, so ist das Produkt der Momente positiv, sonst negativ. Da der Pendelstabes *a* – *d* geschnitten wurde, ergibt sich ein Verformungsanteil aus der Normalkraft nur bei δ'_{22}.

Tabelle 2.11 Berechnung von δ'_{11}

Bereich	l	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2\,dx$	
$a-b$	4,0	⊕ 1,2414	$4{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}2414^2$	2,0547
$b-c$	7,0	1,2414 ⊕ 1	$7{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1{,}2414^2 + 1{,}2414 \cdot 1 + 1^2)$	8,8256
$c-d$	$\sqrt{13}$	1 ⊕	$\sqrt{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2$	1,2019
				12,0822

Tabelle 2.12 Berechnung von δ'_{12}

Bereich	l	M_1	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2\,dx$	
$a-b$	3,0	0,31035 ⊕ 1,2414	⊖ 1,6641	$-3{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}6641 \cdot (2 \cdot 1{,}2414 + 0{,}31035)$	–2,3240
$b-c$	2,0	1,2414 ⊕ 1,1724	1,6641 ⊖	$-2{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}6641 \cdot (2 \cdot 1{,}2414 + 1{,}1724)$	–2,0275
					–4,3515

Tabelle 2.13 Berechnung von δ'_{22}

Bereich	l	M_1	$\frac{I_c}{I}\int M_1^2\,dx$	
$a-b$	3,0	⊖ 1,6641	$3{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}6641^2$	2,7692
$b-c$	2,0	1,6641 ⊖	$2{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}6641^2$	1,8462
				4,6154

Anteil der Normalkraftverformung:

$$\frac{I_c}{A}\int N_2^2\,dx = 0{,}2 \cdot \sqrt{13} \cdot 1^2 = 0{,}7211$$

$$\delta'_{22} = 4{,}6154 + 0{,}7211 = 5{,}3365$$

Tabelle 2.14 Berechnung von δ'_{10}

Bereich	l	M_1	M_0	$\int M_1 M_0\,dx$	
$a-d$	4,0	⊕ 1,2414	⊖ 53,103	$-4{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}2414 \cdot 53{,}103$	–87,895
$d-f$	7,0	1,2414 ⊕ 1	53,103 ⊖	$-7{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 53{,}103 \cdot (2 \cdot 1{,}2414 + 1)$	–215,771
		1,2414 ⊕ 1	⊕ 61,25	$7{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 61{,}25 \cdot (1 + 1{,}2414)$	320,330
					16,664

Tabelle 2.15 Berechnung von δ'_{20}

Bereich	l	M_1	M_0	$\int M_1 M_0\,dx$	
$a-d$	4,0	⊖ 1,6641	13,276 ⊖ 53,103	$3{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}6641 \cdot (2 \cdot 53{,}103 + 13{,}276)$	99,416
$d-f$	7,0	1,6641 ⊖	53,103 ⊖ ⊕ 12,069	$2{,}0 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}6641 \cdot (2 \cdot 53{,}103 - 12{,}069)$	52,218
		1,6641 ⊖	⊕ 5	$-2{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}6641 \cdot 5$	–5,547
					146,087

- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

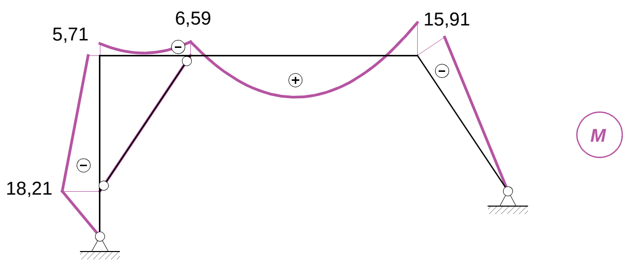
$$\begin{bmatrix} 12{,}0822 & -4{,}3515 \\ -4{,}3515 & 5{,}3365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16{,}664 \\ 146{,}087 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15{,}912 \\ -40{,}350 \end{bmatrix}$$

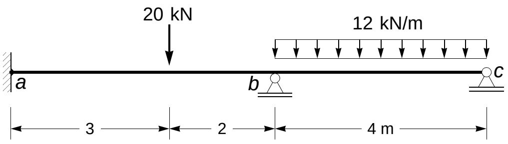
- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_0$$

$$\begin{bmatrix} M_c \\ M_d \\ M_e \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}31035 & 0 & -13{,}276 \\ 1{,}2414 & -1{,}6641 & -53{,}103 \\ 1{,}1724 & 0 & 12{,}069 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15{,}912 \\ -40{,}350 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18{,}21 \\ -5{,}71 \\ -6{,}59 \\ -15{,}91 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.1



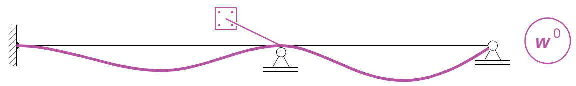
EI = konst. = 6000 kNm²
h = 0,25 m
$\alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

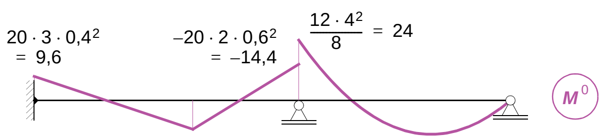
1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

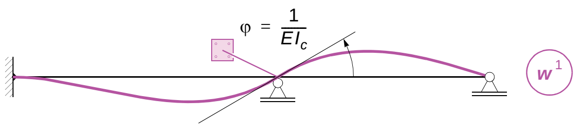
Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *b*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten ist das System weiterhin unverschieblich, es ist keine Verschiebungsfesthaltung erforderlich.

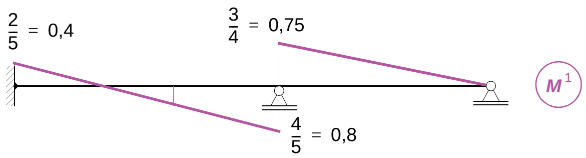
- Lastverformungszustand





- Einheitsverformungszustand





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

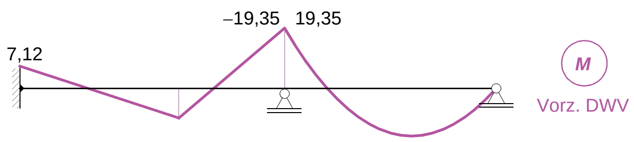
$$(0{,}75 + 0{,}8) \cdot Y_1 + 24 - 14{,}4 = 0$$

$$1{,}55 \cdot Y_1 + 9{,}6 = 0 \Rightarrow Y_1 = -\frac{9{,}6}{1{,}55} = -6{,}1935$$

- Endgültige Momentenlinie

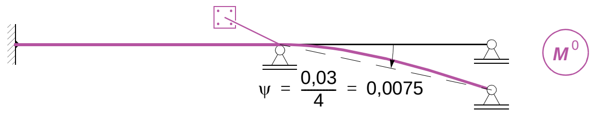
$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$$

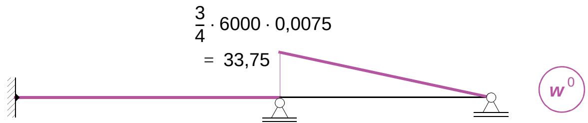
$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}6 & 0{,}4 \\ -14{,}4 & 0{,}8 \\ 24 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6{,}1935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}123 \\ -19{,}355 \\ 19{,}355 \end{bmatrix}$$



2. Die Momentenlinie infolge einer Absenkung des rechten Auflagers um 3 cm.

- Lastverformungszustand





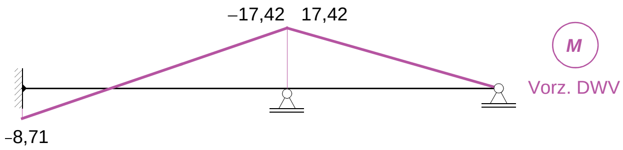
- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

$$1{,}55 \cdot Y_1 + 33{,}75 = 0 \Rightarrow Y_1 = -\frac{33{,}75}{1{,}55} = -21{,}774$$

- Endgültige Momentenlinie

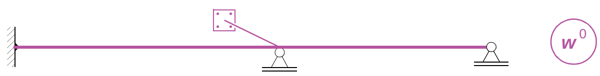
$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$$

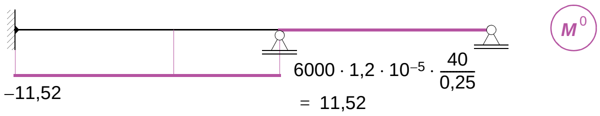
$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}8 \\ 33{,}75 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -21{,}774 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}709 \\ -17{,}419 \\ 17{,}419 \end{bmatrix}$$



3. Die Momentenlinie infolge einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 40°$ (oben wärmer) im linken Feld.

- Lastverformungszustand





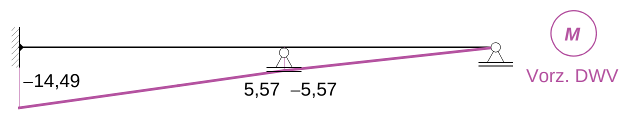
- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

$$1{,}55 \cdot Y_1 + 11{,}52 = 0 \Rightarrow Y_1 = -\frac{11{,}52}{1{,}55} = -7{,}432$$

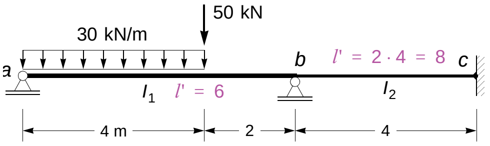
- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$$

$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11{,}52 & 0{,}4 \\ 11{,}52 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -7{,}432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14{,}493 \\ 5{,}574 \\ -5{,}574 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.2



$\frac{I_c}{I_1} = 1 \qquad \frac{I_c}{I_2} = 2$

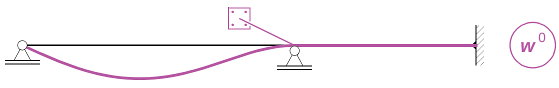
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

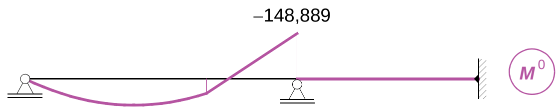
- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *b*

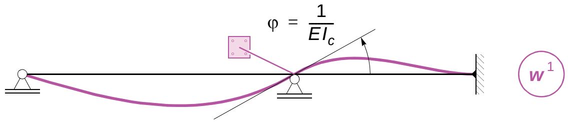
- Lastverformungszustand

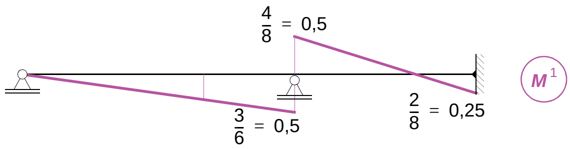
$$M^0_{ba} = -\frac{30 \cdot 4^2}{8}\left(2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - \frac{50 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 6}\left(1+\frac{2}{3}\right) = -148{,}889$$





- Einheitsverformungszustand





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

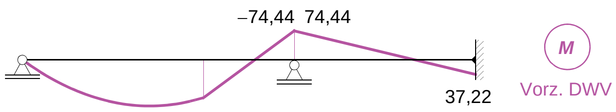
$(0{,}5 + 0{,}5) \cdot Y_1 - 148{,}889 = 0$

$1 \cdot Y_1 - 148{,}889 = 0 \Rightarrow Y_1 = 148{,}889$

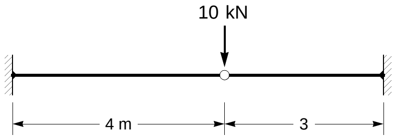
- Endgültige Momentenlinie

$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -148{,}889 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 148{,}889 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -74{,}444 \\ 74{,}444 \\ 37{,}222 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.3



EI = konst. = 5000 kNm²

1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

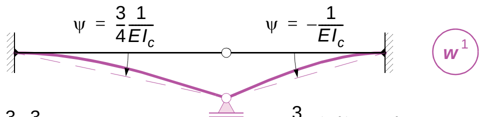
- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

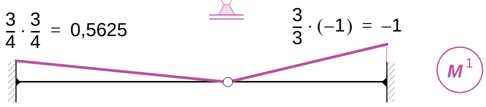
Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten ist das System verschieblich, es ist daher eine vertikale Verschiebungsfesthaltung im Gelenk hinzuzufügen.

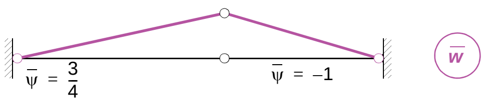
- Lastverformungszustand

Da keine Belastung innerhalb der beiden Grundelemente wirkt, ist der Lastverformungszustand gleich null.

- Einheitsverformungszustand







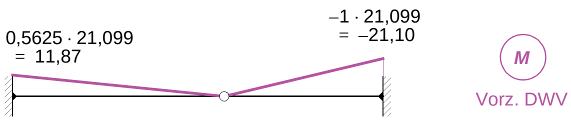
- Gleichgewichtsbedingung $\sum \overline{W} = 0$

$$\sum \overline{W} = \left(0{,}5625 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot (-1)\right) \cdot Y_1 - 10 \cdot 3 = 0$$

$$1{,}421875 \cdot Y_1 - 30 = 0 \Rightarrow Y_1 = 21{,}099$$

- Endgültige Momentenlinie

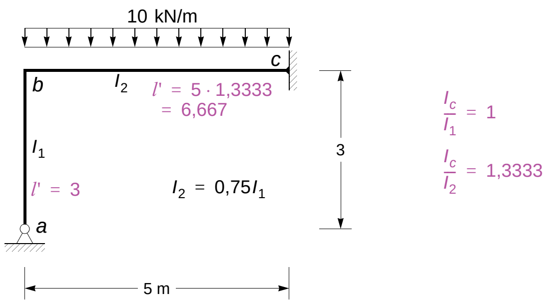
$M = M^1 \cdot Y_1 \quad (M^0 = 0)$



2. Die Verschiebung des Gelenkpunktes.

$$\delta = \frac{3}{EI_c} \cdot Y_1 = \frac{3}{5000} \cdot 21{,}099 = 0{,}01266 \text{ m} = 1{,}266 \text{ cm}$$

Aufgabe 3.4



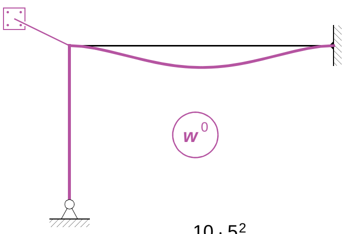
$\frac{I_c}{I_1} = 1 \qquad \frac{I_c}{I_2} = 1{,}3333$

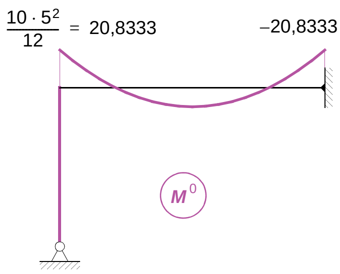
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

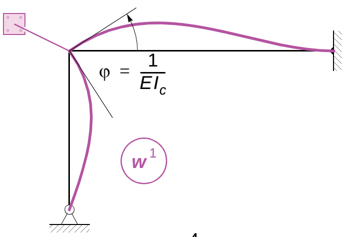
Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *b*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten ist das System weiterhin unverschieblich, es ist keine Verschiebungsfesthaltung erforderlich.

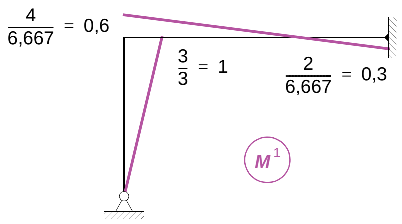
- Lastverformungszustand





- Einheitsverformungszustand





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

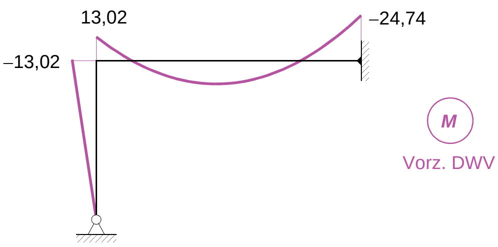
$(0{,}6 + 1) \cdot Y_1 + 20{,}8333 = 0$

$1{,}6 \cdot Y_1 + 20{,}8333 = 0 \Rightarrow Y_1 = -13{,}021$

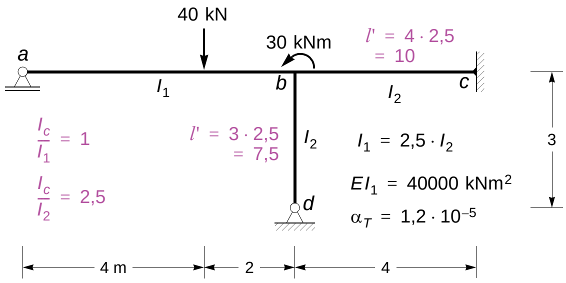
- Endgültige Momentenlinie

$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}8333 & 0{,}6 \\ -20{,}8333 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -13{,}021 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13{,}021 \\ 13{,}021 \\ -24{,}740 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.5

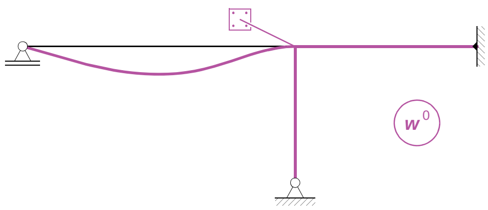


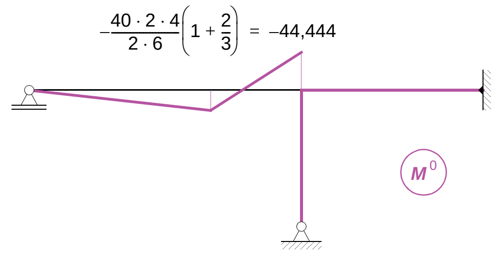
1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

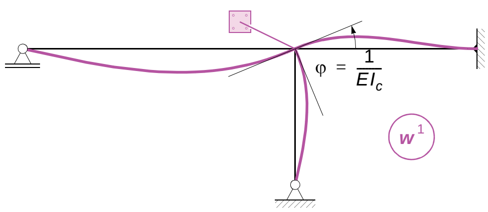
Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *b*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten ist das System weiterhin unverschieblich, es ist keine Verschiebungsfesthaltung erforderlich.

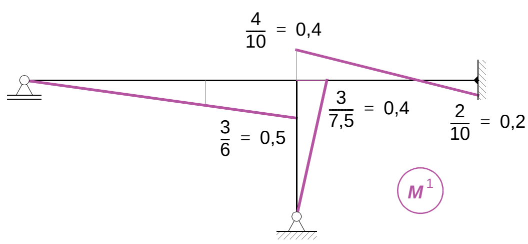
- Lastverformungszustand





- Einheitsverformungszustand





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

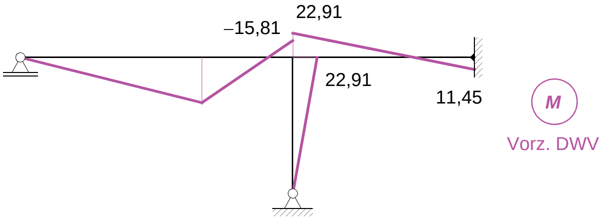
$(0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}5) \cdot Y_1 - 44{,}444 - 30 = 0$

$1{,}3 \cdot Y_1 - 44{,}444 = 0 \Rightarrow Y_1 = 57{,}265$

- Endgültige Momentenlinie

$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ M_{bd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44{,}444 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 57{,}265 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15{,}812 \\ 22{,}906 \\ 11{,}453 \\ 22{,}906 \end{bmatrix}$$



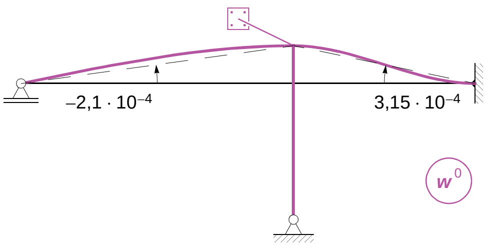
2. Die Momentenlinie infolge einer gleichmäßigen Erwärmung des Stiels um $T_0 = 35°$.

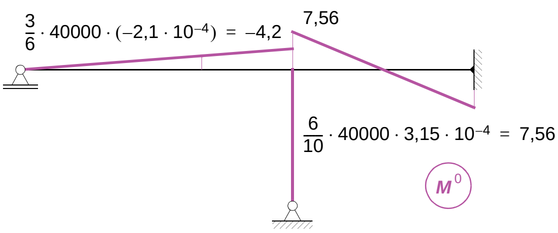
- Lastverformungszustand

$$\Delta l = \alpha_T \cdot T_0 \cdot l = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 35 \cdot 3 = 1{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\psi_{ab} = \frac{1{,}26 \cdot 10^{-3}}{6} = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$$

$$\psi_{bc} = \frac{1{,}26 \cdot 10^{-3}}{4} = 3{,}15 \cdot 10^{-4}$$





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

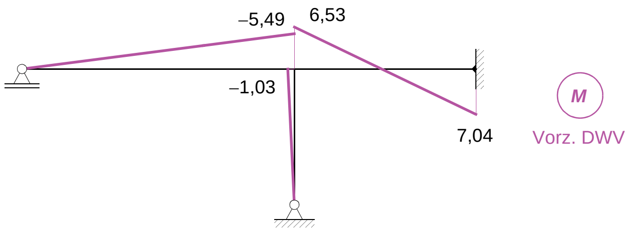
$$(0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}5) \cdot Y_1 - 4{,}2 + 7{,}56 = 0$$

$$1{,}3 \cdot Y_1 + 3{,}36 = 0 \Rightarrow Y_1 = -2{,}5846$$

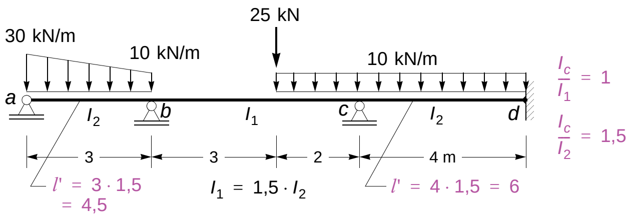
- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ M_{bd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}2 & 0{,}5 \\ 7{,}56 & 0{,}4 \\ 7{,}56 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2{,}5846 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}492 \\ 6{,}526 \\ 7{,}043 \\ -1{,}034 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.6



Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

Hinzufügen von Drehfesthaltungen in den Punkten b und c. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten ist das System weiterhin unverschieblich, es ist keine Verschiebungsfesthaltung erforderlich.

- Lastverformungszustand

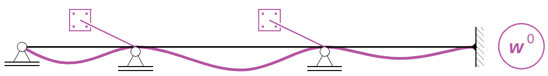
$$M^0_{ba} = -\frac{3^2}{120}(8 \cdot 10 + 7 \cdot 30) = -21{,}75$$

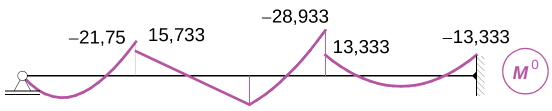
$$M^0_{bc} = \frac{10 \cdot 2^2}{3} 0{,}4(1 - 0{,}75 \cdot 0{,}4) + 25 \cdot 3 \cdot 0{,}4^2 = 15{,}733$$

$$M^0_{cb} = -\frac{10 \cdot 2^2}{3}(1{,}5 - 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}75 \cdot 0{,}4^2) - 25 \cdot 2 \cdot 0{,}6^2$$

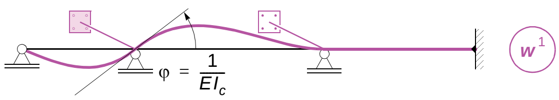
$$= -28{,}933$$

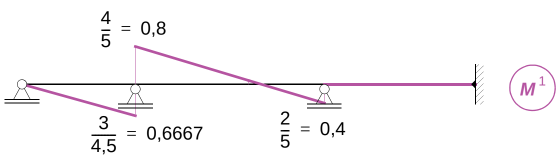
$$M^0_{cd} = -M^0_{dc} = \frac{10 \cdot 4^2}{12} = 13{,}333$$

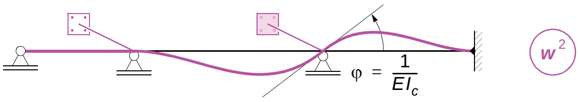


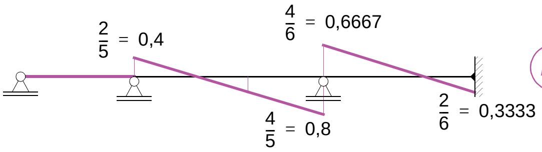


- Einheitsverformungszustände









- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_b = 0$

$(0{,}8 + 0{,}6667) \cdot Y_1 + 0{,}4 \cdot Y_2 - 21{,}75 + 15{,}733 = 0$

$1{,}4667 \cdot Y_1 + 0{,}4 \cdot Y_2 - 6{,}017 = 0$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_c = 0$

$0{,}4 \cdot Y_1 + (0{,}8 + 0{,}6667) \cdot Y_2 - 28{,}933 + 13{,}333 = 0$

$0{,}4 \cdot Y_1 + 1{,}4667 \cdot Y_2 - 15{,}6 = 0$

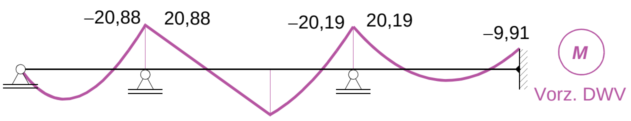
- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}4667 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}4667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6{,}017 \\ -15{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2980 \\ 10{,}2824 \end{bmatrix}$$

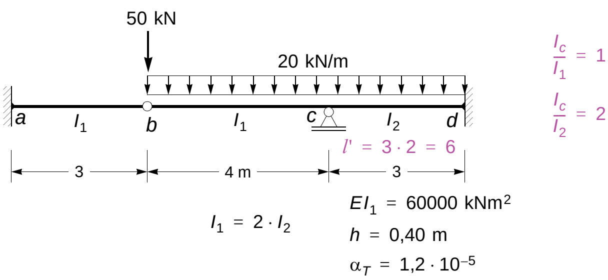
- Endgültige Momentenlinie

$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1 + M^2 \cdot Y_2$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \\ M_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21{,}75 & 0{,}6667 & 0 \\ 15{,}733 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ -28{,}933 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 13{,}333 & 0 & 0{,}6667 \\ -13{,}333 & 0 & 0{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2980 \\ 10{,}2824 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20{,}885 \\ 20{,}885 \\ -20{,}188 \\ 20{,}188 \\ -9{,}906 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.7

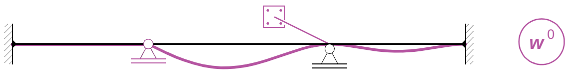


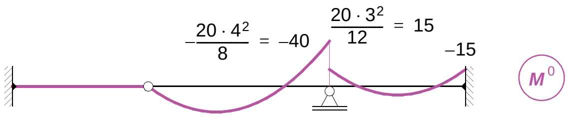
1. Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

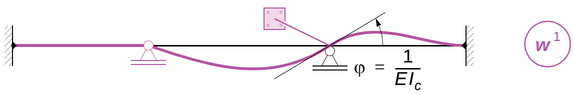
Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *c*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten entsteht eine lokale kinematische Kette im Bereich *a – b – c*. Daher muss eine vertikale Verschiebungsfesthaltung im Punkt *b* hinzugefügt werden.

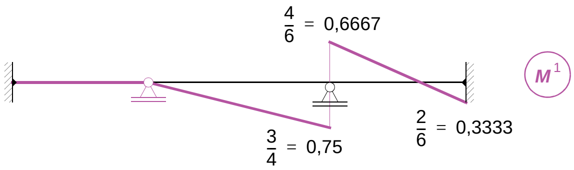
- Lastverformungszustand

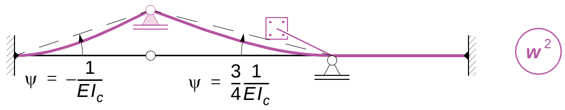


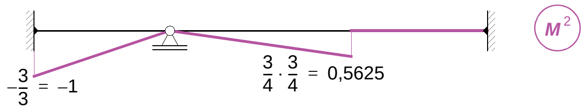


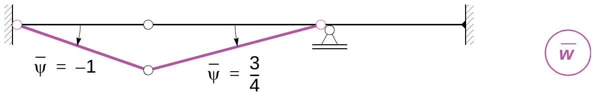
- Einheitsverformungszustände











- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_c = 0$

$(0{,}75 + 0{,}6667) \cdot Y_1 + 0{,}5625 \cdot Y_2 - 40 + 15 = 0$

$1{,}4167 \cdot Y_1 + 0{,}5625 \cdot Y_2 - 25 = 0$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum \overline{W} = 0$

$$\sum \overline{W} = 0{,}75 \cdot \frac{3}{4} \cdot Y_1 + \left(0{,}5625 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot (-1)\right) \cdot Y_2 - 40 \cdot \frac{3}{4} + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 0$$

$0{,}5625 \cdot Y_1 + 1{,}4219 \cdot Y_2 + 240 = 0$

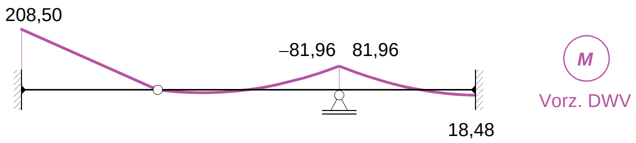
- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}4167 & 0{,}5625 \\ 0{,}5625 & 1{,}4219 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100{,}445 \\ -208{,}528 \end{bmatrix}$$

- Endgültige Momentenlinie

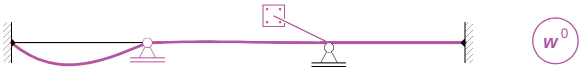
$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1 + M^2 \cdot Y_2$

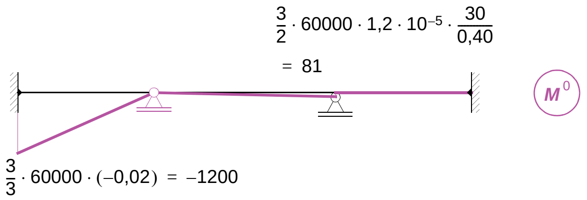
$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \\ M_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -40 & 0{,}75 & 0{,}5625 \\ 15 & 0{,}6667 & 0 \\ -15 & 0{,}3333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 100{,}445 \\ -208{,}528 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208{,}528 \\ -81{,}963 \\ 81{,}963 \\ 18{,}482 \end{bmatrix}$$



2. Die Momentenlinie infolge einer Temperaturdifferenz von $\Delta T = 30°$ (oben wärmer) im mittleren Feld sowie einer eingeprägten Drehung des linken Auflagers um $\varphi = 0{,}02$.

- Lastverformungszustand





- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_c = 0$

$$1{,}4167 \cdot Y_1 + 0{,}5625 \cdot Y_2 + 81 = 0$$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum \overline{W} = 0$

$$\sum \overline{W} = 1{,}421875 \cdot Y_1 + 0{,}5625 \cdot Y_2 + 81 \cdot \frac{3}{4} - 1200 \cdot (-1) = 0$$

$$0{,}5625 \cdot Y_1 + 1{,}4219 \cdot Y_2 + 1260{,}75 = 0$$

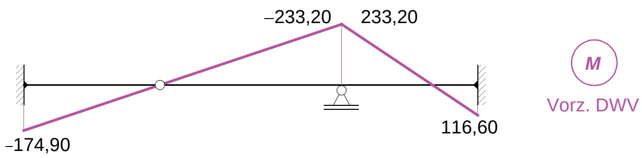
- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}4167 & 0{,}5625 \\ 0{,}5625 & 1{,}4219 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 81 \\ 1260{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 349{,}840 \\ -1025{,}080 \end{bmatrix}$$

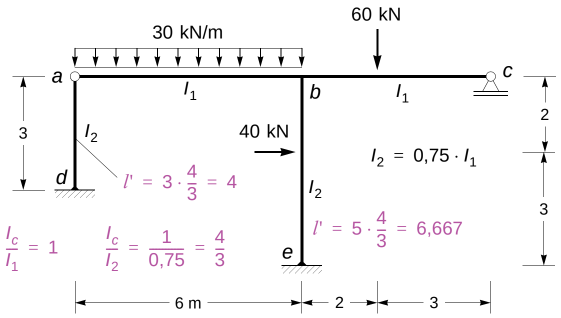
- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1 + M^2 \cdot Y_2$$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \\ M_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1200 & 0 & -1 \\ 81 & 0{,}75 & 0{,}5625 \\ 0 & 0{,}6667 & 0 \\ 0 & 0{,}3333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 349{,}840 \\ -1025{,}080 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -174{,}920 \\ -233{,}227 \\ 233{,}227 \\ 116{,}614 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.8

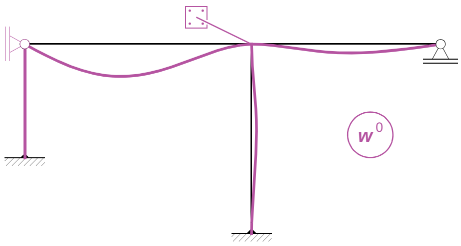


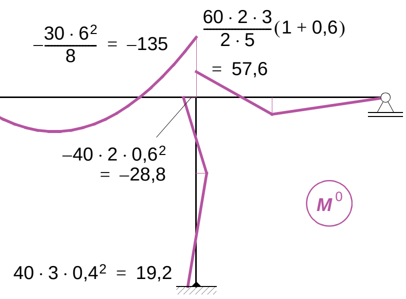
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

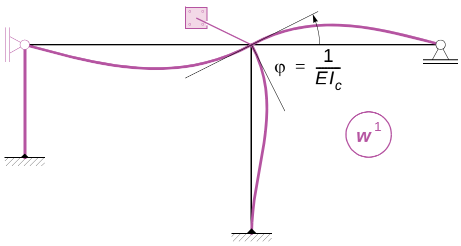
Hinzufügen einer Drehfesthaltung im Punkt *b*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten entsteht ein kinematisches System. Daher muss eine horizontale Verschiebungsfesthaltung im Riegel hinzugefügt werden.

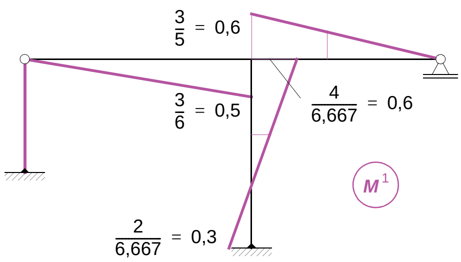
- Lastverformungszustand

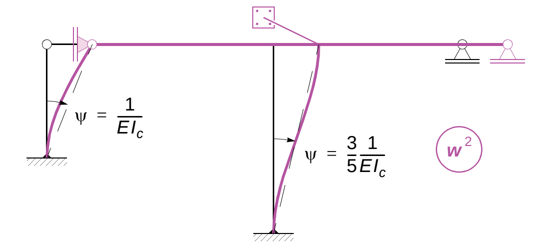


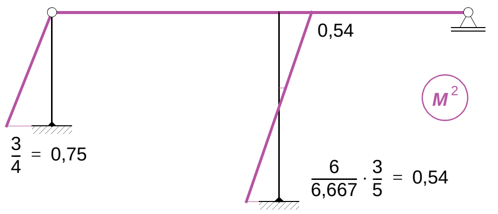


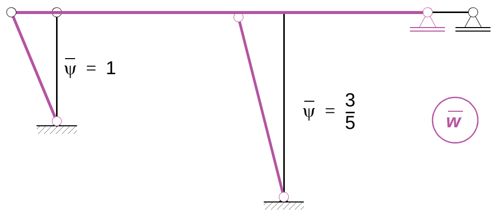
- Einheitsverformungszustände











- $\sum M_b = 0$

$$(0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}6) \cdot Y_1 + 0{,}54 \cdot Y_2 - 135 + 57{,}6 - 28{,}8 = 0$$

$$1{,}7 \cdot Y_1 + 0{,}54 \cdot Y_2 - 106{,}2 = 0$$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum \bar{W} = 0$

$$\sum \bar{W} = (0{,}6 + 0{,}3) \cdot \frac{3}{5} \cdot Y_1 + \left(0{,}75 \cdot 1 + 0{,}54 \cdot \frac{3}{5} \cdot 2\right) \cdot Y_2$$

$$+ (19{,}2 - 28{,}8) \cdot \frac{3}{5} - 40 \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 = 0$$

$$0{,}54 \cdot Y_1 + 1{,}398 \cdot Y_2 - 77{,}76 = 0$$

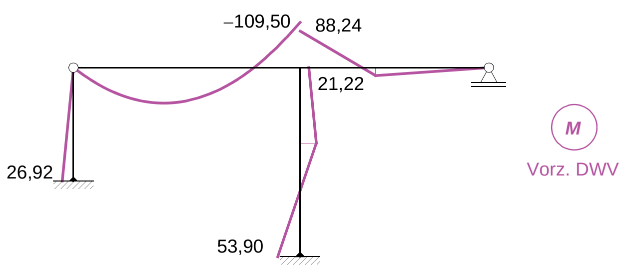
- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}54 \\ 0{,}54 & 1{,}398 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -106{,}2 \\ -77{,}76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51{,}068 \\ 35{,}896 \end{bmatrix}$$

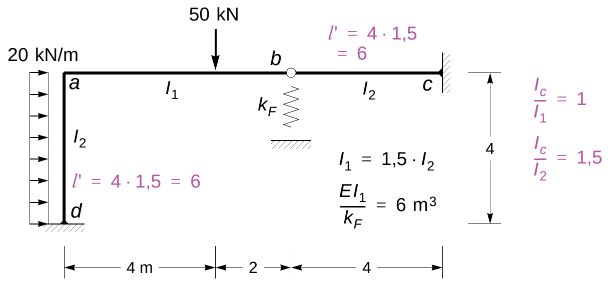
- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1 + M^2 \cdot Y_2$$

$$\begin{bmatrix} M_{da} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{be} \\ M_{eb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}75 \\ -135 & 0{,}5 & 0 \\ 57{,}6 & 0{,}6 & 0 \\ -28{,}8 & 0{,}6 & 0{,}54 \\ 19{,}2 & 0{,}3 & 0{,}54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 51{,}068 \\ 35{,}896 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26{,}922 \\ -109{,}466 \\ 88{,}241 \\ 21{,}225 \\ 53{,}905 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 3.9

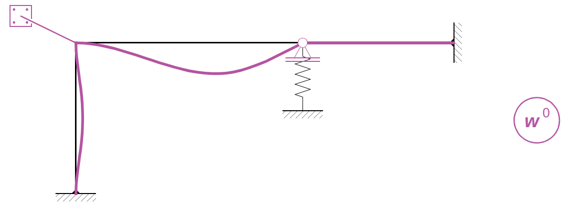


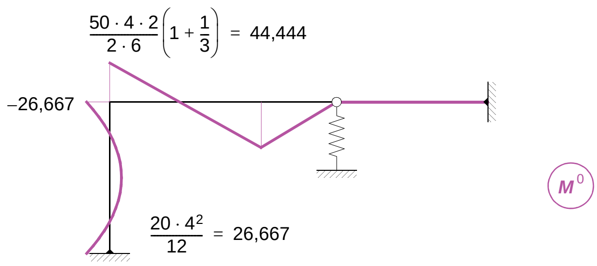
Die Momentenlinie infolge der angegebenen Belastung.

- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

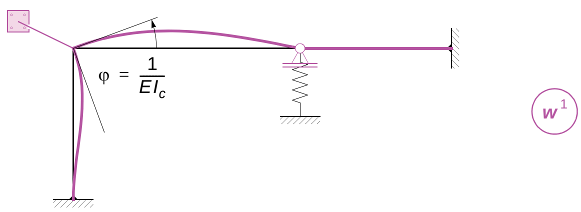
Hinzufügen einer Verschiebungsfesthaltung im Punkt *a*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten entsteht eine lokale kinematische Kette im Riegel. Daher muss eine vertikale Verschiebungsfesthaltung im Punkt *b* hinzugefügt werden.

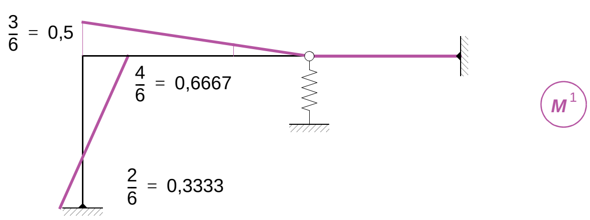
- Lastverformungszustand

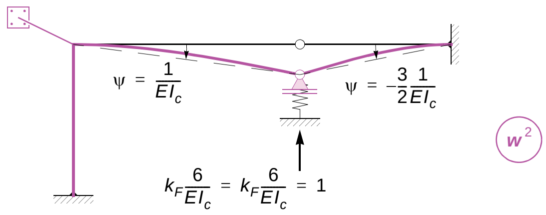


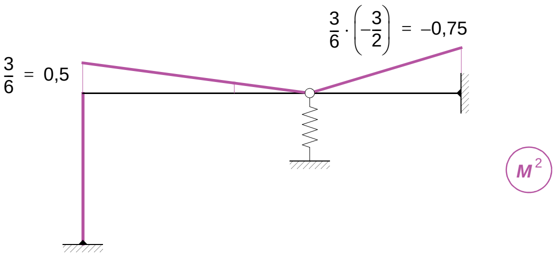


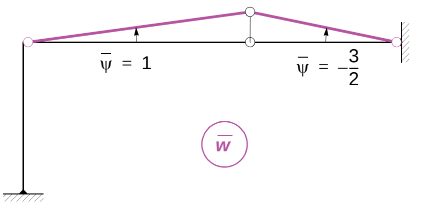
- Einheitsverformungszustände











- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_c = 0$

$$(0{,}5 + 0{,}6667) \cdot Y_1 + 0{,}5 \cdot Y_2 + 44{,}444 - 26{,}667 = 0$$

$$1{,}1667 \cdot Y_1 + 0{,}5 \cdot Y_2 + 17{,}778 = 0$$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum \bar{W} = 0$

$$\sum \bar{W} = 0{,}5 \cdot 1 \cdot Y_1 + \left(0{,}5 \cdot 1 + (-0{,}75) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot 6\right) \cdot Y_2$$

$$+ 44{,}444 \cdot 1 - 50 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$0{,}5 \cdot Y_1 + 7{,}625 \cdot Y_2 - 155{,}556 = 0$$

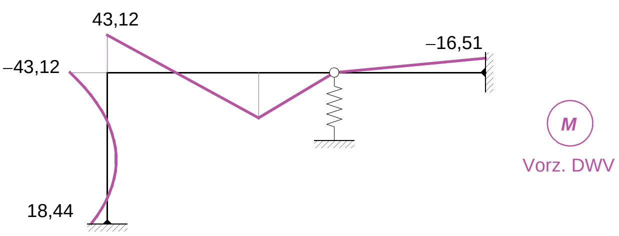
- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}1667 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 7{,}625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17{,}778 \\ -155{,}556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24{,}675 \\ 22{,}019 \end{bmatrix}$$

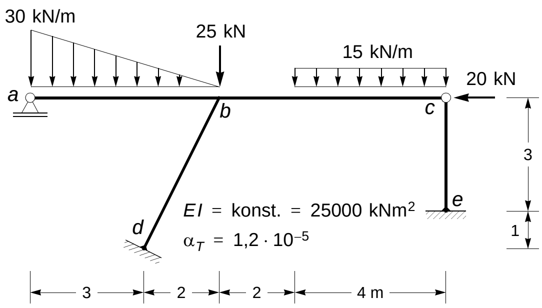
- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1 + M^2 \cdot Y_2$$

$$\begin{bmatrix} M_{da} \\ M_{ad} \\ M_{ab} \\ M_{cb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26{,}667 & 0{,}3333 & 0 \\ -26{,}667 & 0{,}6667 & 0 \\ 44{,}444 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -24{,}675 \\ 22{,}019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18{,}442 \\ -43{,}116 \\ 43{,}116 \\ -16{,}514 \end{bmatrix}$$



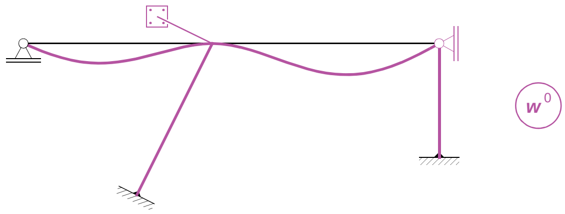
Aufgabe 3.10

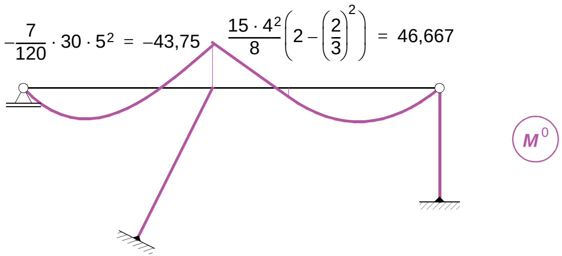


- Kinematisch bestimmtes Hauptsystem

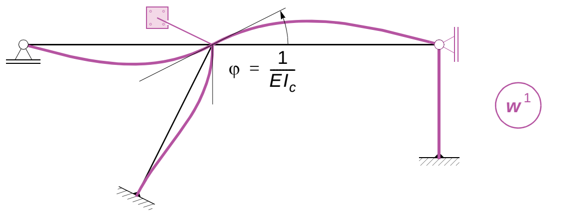
Hinzufügen einer Verschiebungsfesthaltung im Punkt *b*. Nach Einfügen von Vollgelenken in allen Knoten entsteht ein Verschiebliches System (siehe Polplan unten). Es wird eine Verschiebungsfesthaltung in horizontaler Richtung im Punkt *c* hinzugefügt.

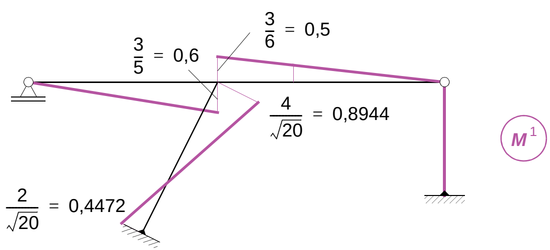
- Lastverformungszustand



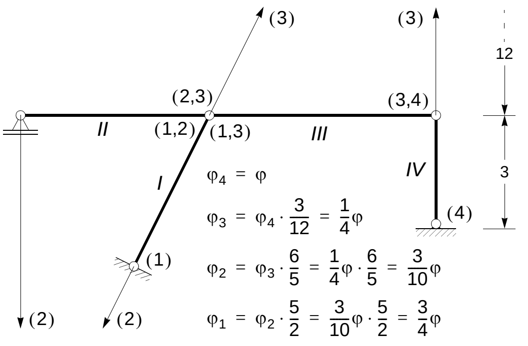


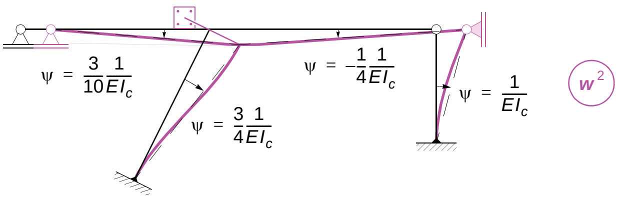
- Einheitsverformungszustände

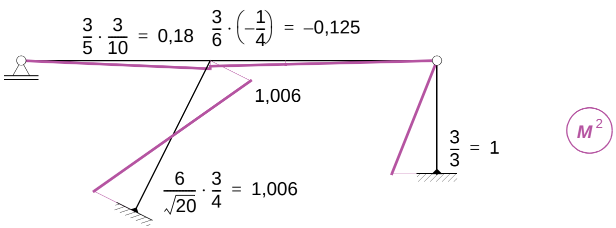


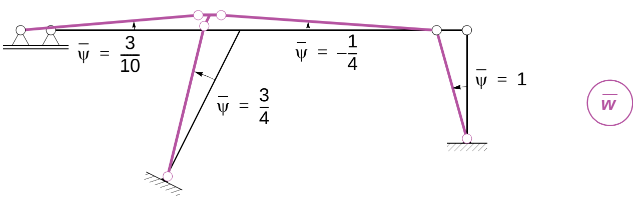


Für den Einheitsverschiebungszustand werden die Stabsehnendrehwinkel benötigt. Sie ergeben sich in der folgenden Polplankonstruktion. Der Winkel der Scheibe *IV* wird vorgeben, daraus folgen die anderen Winkel aus den horizontalen bzw. vertikalen Abständen der Absolutpole zum Relativpol der Scheiben.

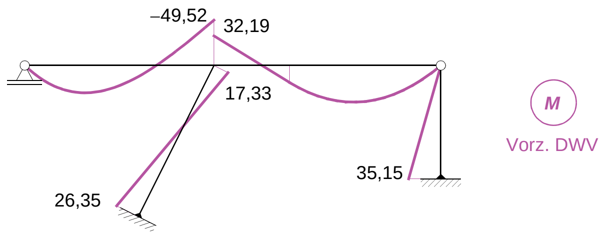








$$\begin{bmatrix} M_{db} \\ M_{bd} \\ M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{ec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4472 & 1,006 \\ 0 & 0,8944 & 1,006 \\ -43,75 & 0,6 & 0,18 \\ 46,667 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -20,164 \\ 35,146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,348 \\ 17,330 \\ -49,522 \\ 32,192 \\ 35,146 \end{bmatrix}$$



- Gleichgewichtsbedingung $\sum M_c = 0$

$$(0,5+0,6+0,8944)\cdot Y_1 + (0,18-0,125+1,006)\cdot Y_2$$
$$+\,46,667 - 43,75 = 0$$
$$1,9944\cdot Y_1 + 1,061\cdot Y_2 + 2,917 = 0$$

- Gleichgewichtsbedingung $\sum \overline{W} = 0$

$$\sum \overline{W} = \left(0,6\cdot\frac{3}{10} + 0,5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 0,8944\cdot\frac{3}{4} + 0,4472\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot Y_1$$
$$+\left(0,18\cdot\frac{3}{10} + (-0,125)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 1,006\cdot\frac{3}{4}\cdot 2 + 1\cdot 1\right)\cdot Y_2$$
$$-\,43,75\cdot\frac{3}{10} + 46,667\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - 75\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{3}$$
$$-\,25\cdot\frac{3}{10}\cdot 5 - 15\cdot 4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 + 20\cdot 3 = 0$$
$$1,061\cdot Y_1 + 2,595\cdot Y_2 - 69,792 = 0$$

- Gleichungssystem (Gleichgewichtsbed.) und Lösung

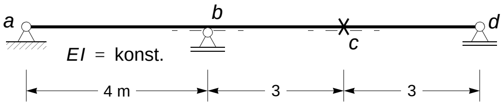
$$\begin{bmatrix} 1,9944 & 1,061 \\ 1,061 & 2,595 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,917 \\ -69,792 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20,164 \\ 35,146 \end{bmatrix}$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = M^0 + M^1\cdot Y_1 + M^2\cdot Y_2$$

Eine Einflusslinie entspricht der Verformung des Systems infolge der zugehörigen Weggröße „–1 “. Da ein Verformungslastfall am statisch bestimmten Hauptsystem keine Schnittgrößen erzeugt, ist die Momentlinie M_0 des Lastspannungszustands in allen nachfolgenden Berechnungen gleich null.

Aufgabe 4.1

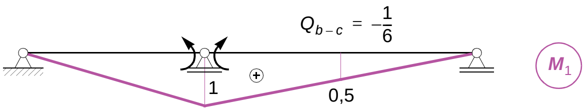


1. Ermittlung der Einflusslinie für M_c , η im Abstand von 1 m.

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch Einlegen eines Momentengelenks im Punkt *b* entstehen zwei Balken auf zwei Stützen.

- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c / I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{11} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 3{,}3333$$

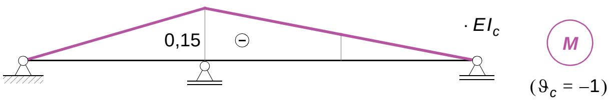
$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}5 \cdot (-1) = 0{,}5 \cdot EI_c$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{0{,}5 \cdot EI_c}{3{,}3333} = -0{,}15 \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

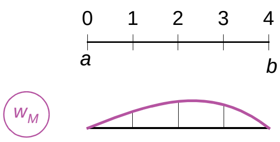
$$M = X_1 \cdot M_1$$



- Berechnung der Einflusslinienordinaten im Bereich *a* – *b*

$$\eta = w = w_E + w_M + w_0^*$$

Der Anteil w_E entfällt, weil sich die Punkte *a* und *b* nicht verschieben können. Der Anteil w_0^* entfällt, weil die Knick „–1“ im Bereich *b* – *c* vorhanden ist.



$$w_M^D = \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{6} \cdot M \cdot l^2 \cdot \frac{I_c}{I} \cdot \omega_D$$

$$= \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-0{,}15 \cdot EI_c) \cdot 4^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega_D$$

$$= -0{,}4\omega_D$$

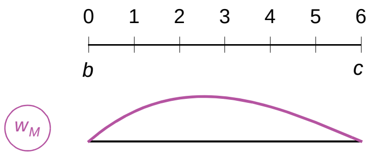
Tabelle 4.1 Ermittlung der Einflusslinienordinaten

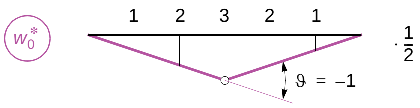
	0	1	2	3	4
$\omega_D \cdot 10^4$	0	2344	3750	3281	0
$w_M^{D1} = -0{,}4\omega_D$	0	–0,0938	–0,1500	–0,1312	0
	0	–0,0938	–0,1500	–0,1312	0

- Berechnung der Einflusslinienordinaten im Bereich *b* – *d*

$$\eta = w = w_E + w_M + w_0^*$$

Der Anteil w_E entfällt, weil sich die Punkte *b* und *c* nicht verschieben können.





$$w_M^D = \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{6} \cdot M \cdot l^2 \cdot \frac{I_c}{I} \cdot \omega'_D$$

$$= \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-0{,}15 \cdot EI_c) \cdot 6^2 \cdot 1{,}0 \cdot \omega'_D$$

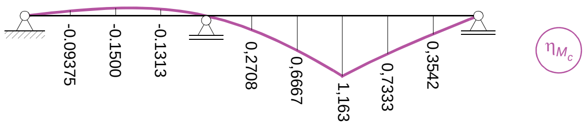
$$= -0{,}9\omega'_D$$

Tabelle 4.2 Ermittlung der Einflusslinienordinaten

	0	1	2	3	4	5	6
$\omega_D \cdot 10^4$	0	2546	3704	3750	2963	1620	0
$w_M^D = -0{,}9\omega'_D$	0	–0,2291	–0,2931	–0,3334	–0,2667	–0,1458	0
w_0^*	0	0,5000	1,0000	1,5000	1,0000	0,5000	0
	0	0,2709	0,6667	1,1625	0,7333	0,3542	0

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Momentenlinie ist die Einflusslinie im gesamten Bereich nach „oben“ gekrümmt. Im Punkt *c* ist der Knick von „–1 “ vorhanden.



2. Ermittlung der Einflusslinie für Q_c , $\eta_{c,\,li}$

- Berechnung von δ'_{10}

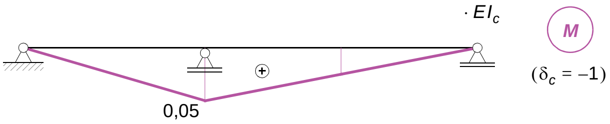
$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-1) = -0{,}16667 \cdot EI_c$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

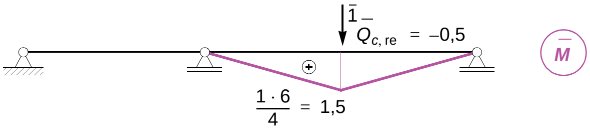
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-0{,}16667 \cdot EI_c}{3{,}3333} = 0{,}05 \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von $\eta_{c,\,li}$ und Auswertung der Arbeitsgleichung



Da die Einflusslinienordinate links von c berechnet werden soll, befindet sich die Klaffung „–1 " rechts vom Angriffspunkt des virtuellen Kraft.

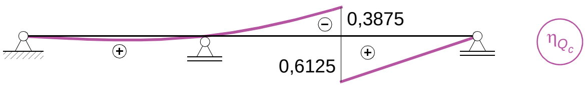
$$\bar{1} \cdot \eta'_{c,\,li} = \frac{I_c}{I} \int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{Q}_{c,\,re} \cdot (-1)]$$

$$\eta'_{c,\,li} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0{,}05 \cdot EI_c \cdot 1{,}5 - EI_c \cdot [(-0{,}5) \cdot (-1)]$$

$$= -0{,}3875 EI_c \Rightarrow \eta_{c,\,li} = -0{,}3875$$

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Momentenlinie ist die Einflusslinie im gesamten Bereich nach „unten" gekrümmt. Im Punkt c ist die Relativverschiebung (Klaffung) von „–1 " vorhanden.

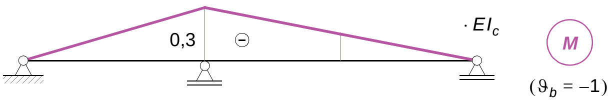


3. Ermittlung der Einflusslinie für M_b , η_c

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 1 \cdot (-1) = EI_c$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{1 \cdot EI_c}{3{,}3333} = -0{,}3 \cdot EI_c$$



- Berechnung von η_c durch Auswertung der Arbeitsgleichung

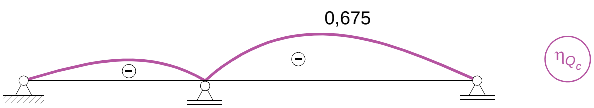
Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt b ist gleich null (siehe virtueller Zustand oben), daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I} \int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_b \cdot (-1)]$$

$$\eta'_c = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-0{,}3) \cdot EI_c \cdot 1{,}5 = -0{,}675 EI_c \Rightarrow \eta_c = -0{,}675$$

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Momentenlinie ist die Einflusslinie im gesamten Bereich „nach oben" gekrümmt. Im Punkt b ist der Knick von „–1 " vorhanden.



4. Ermittlung der Einflusslinie für $Q_{b,\,re}$, η_c

- Berechnung von δ'_{10}

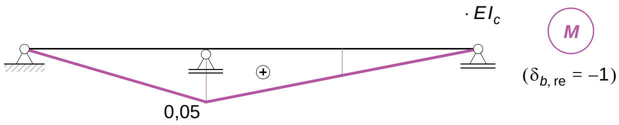
$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-1) = -0{,}16667 \cdot EI_c$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{-0{,}16667 \cdot EI_c}{3{,}3333} = 0{,}05 \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$M = X_1 \cdot M_1$



- Berechnung von η_c durch Auswertung der Arbeitsgleichung

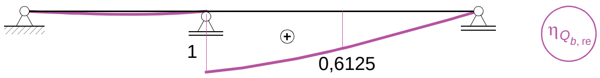
$$\bar{1} \cdot \eta'_{c,\,li} = \frac{I_c}{I} \int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{Q}_c \cdot (-1)]$$

$$\eta'_{c,\,li} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0{,}05 \cdot EI_c \cdot 1{,}5 - EI_c \cdot [0{,}5 \cdot (-1)]$$

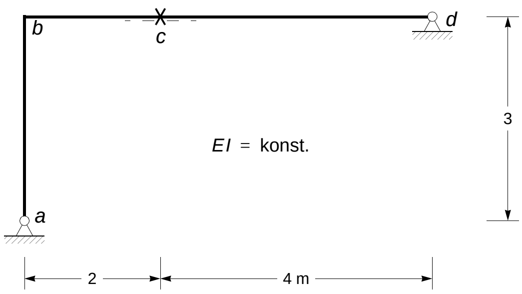
$$= 0{,}6125 EI_c \Rightarrow \eta_{c,\,li} = 0{,}6125$$

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Momentenlinie ist die Einflusslinie im gesamten Bereich nach „unten" gekrümmt. Rechts vom Auflagerpunkt b ist die Klaffung von „–1 " vorhanden.



Aufgabe 4.2

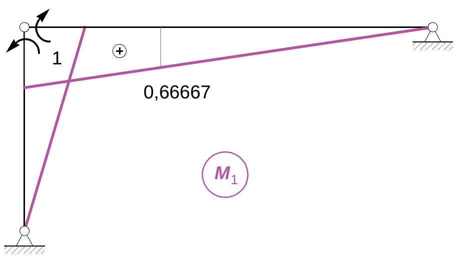


Ermittlung der Einflusslinie für M_c , η_c

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Durch Einlegen eines Momentengelenks im Punkt b entsteht ein Dreigelenkrahmen.

- Einheitsspannungszustand



- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c / I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{11} = (3+6) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 3$$

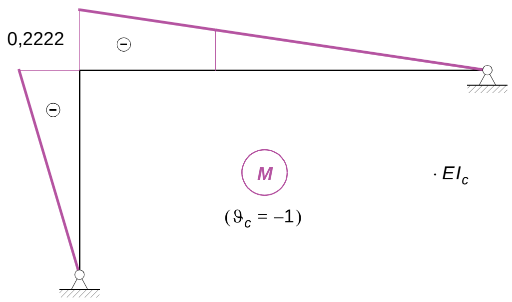
$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}66667 \cdot (-1) = 0{,}66667 \cdot EI_c$$

- Ermittlung der Unbekannten aus der Verformungsbedingung

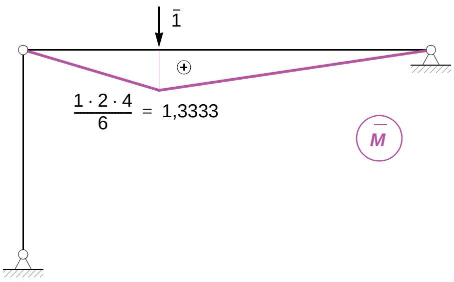
$$X_1 = -\frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = -\frac{0{,}66667 \cdot EI_c}{3} = -0{,}22222 \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1$$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_c und Auswertung der Arbeitsgleichung

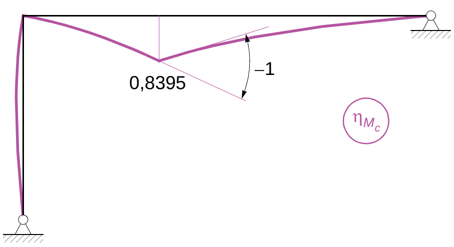


$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I} \int M \bar{M} \, dx - EI_c \cdot [\bar{M}_c \cdot (-1)]$$

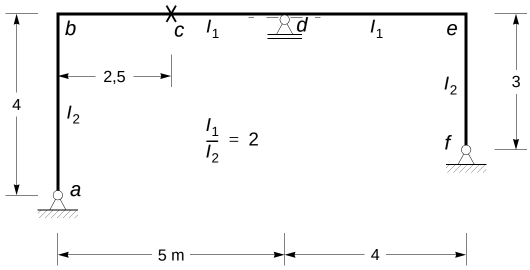
$$\eta'_c = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-0{,}2222 EI_c) \cdot 1{,}3333 \cdot \left(1 + \frac{4}{6}\right)$$
$$- EI_c \cdot [1{,}3333 \cdot (-1)] = 0{,}8395 EI_c \Rightarrow \eta_c = 0{,}8395$$

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Momentenlinie ist die Einflusslinie im gesamten Bereich „nach außen" gekrümmt. Im Punkt c ist der Knick von „-1" vorhanden. Aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe ist der Punkt b unverschieblich.



Aufgabe 4.3

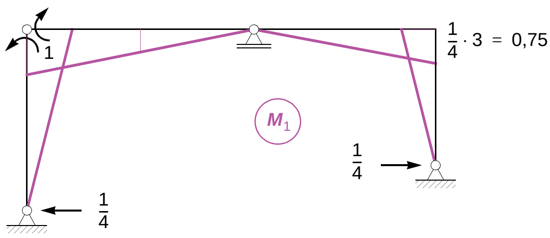


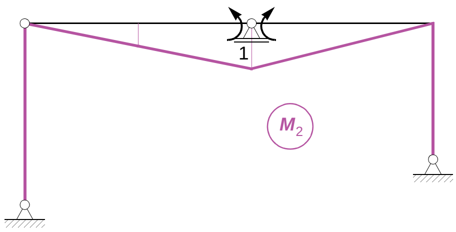
Ermittlung der Einflusslinie für M_d, $\eta_{b,h}$, η_c

- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das Abzählkriterium ergibt $n = 5 - 3 \cdot 1 = 2$. Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Es werden Momentengelenke in den Punkten b und d eingelegt.

- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

$$\delta'_{11} = 2{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 2{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2$$
$$+ 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 = 6{,}20833$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = 1{,}0 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 + 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0{,}75 = 1{,}3333$$

$$\delta'_{22} = 1{,}0 \cdot (5+4) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 3$$

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\delta'_{20} = -EI_c \cdot 1 \cdot (-1) = EI_c$$

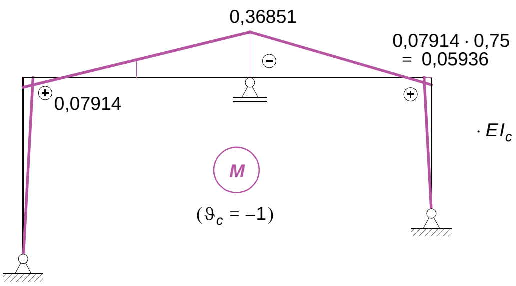
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 6{,}20833 & 1{,}3333 \\ 1{,}3333 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} EI_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

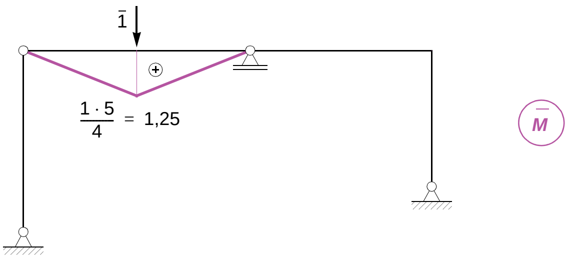
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}07914 \\ -0{,}36851 \end{bmatrix} \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_c und Auswertung der Arbeitsgleichung



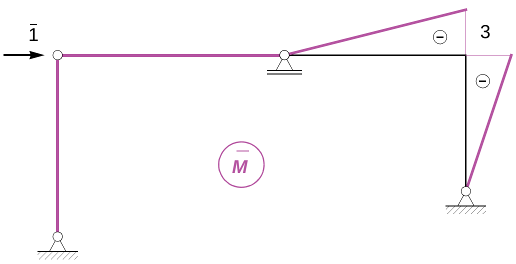
Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_d \cdot (-1)]$$

$$\eta'_c = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1{,}25 \cdot (0{,}07914 - 0{,}36851) \cdot EI_c$$

$$= -0{,}45213 EI_c \Rightarrow \eta_c = -0{,}45213$$

- Virtueller Zustand zur Berechnung von $\eta_{b,h}$ und Auswertung der Arbeitsgleichung



Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_{b,h} = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_d \cdot (-1)]$$

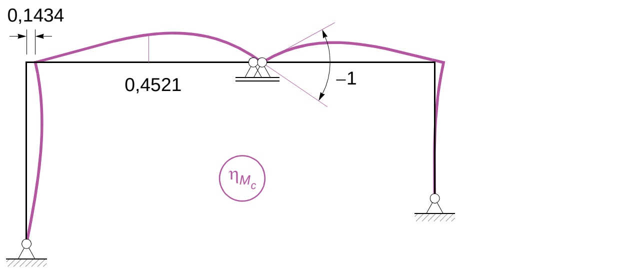
$$\eta'_{b,h} = 1{,}0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot (2 \cdot 0{,}05936 - 0{,}36851) \cdot EI_c$$

$$+ 2{,}0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 0{,}05936 \cdot EI_c$$

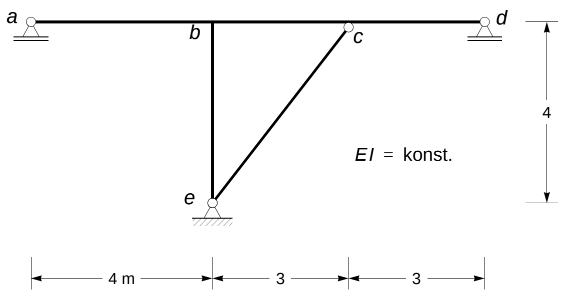
$$= 0{,}143446 EI_c \Rightarrow \eta_{b,h} = 0{,}143446$$

- Darstellung der Einflusslinie

Aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe verschieben sich alle Punkte des Riegels um $\eta_{b,h}$ nach rechts. Die Rahmenecken können sich nicht vertikal verschieben. Im Punkt c ist der Knick „-1“ vorhanden. Mit den bekannten Krümmungen aus der Momentenlinie kann die Einflusslinie qualitativ gezeichnet werden.



Aufgabe 4.4

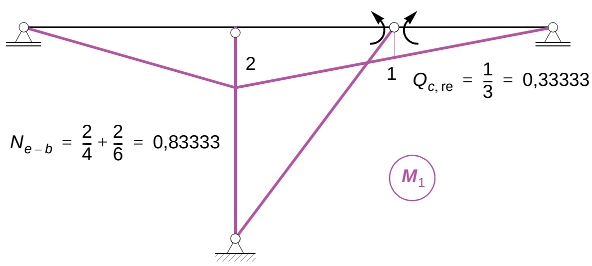


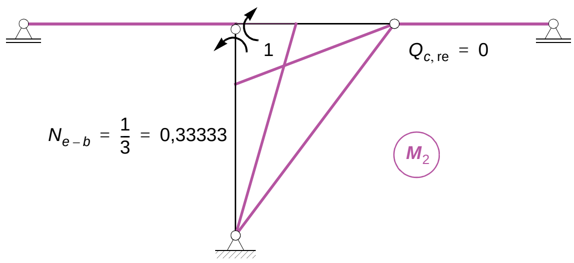
- Statisch bestimmtes Hauptsystem

Zur Anwendung des Abzählkriteriums wird der Pendelstab $e-c$ als einwertige Bindung betrachtet ($z = 1$). Damit ergibt sich: $n = 4+1-3 \cdot 1 = 2$. Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Es werden Momentengelenke unterhalb des Punktes b und im Punkt c eingelegt.

1. Ermittlung der Einflusslinie für N_{e-b}, η_c

- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c/I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{11} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^2 = 13{,}333$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 2{,}5$$

$$\delta'_{22} = (3+4) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 2{,}3333$$

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}83333 \cdot (-1) = 0{,}83333 EI_c$$

$$\delta'_{20} = -EI_c \cdot 0{,}33333 \cdot (-1) = 0{,}33333 EI_c$$

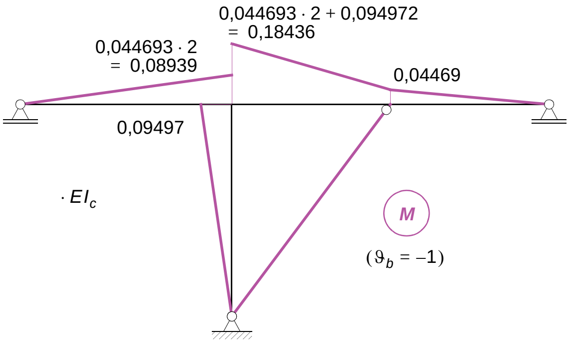
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 13{,}333 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}83333 \\ 0{,}33333 \end{bmatrix} EI_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

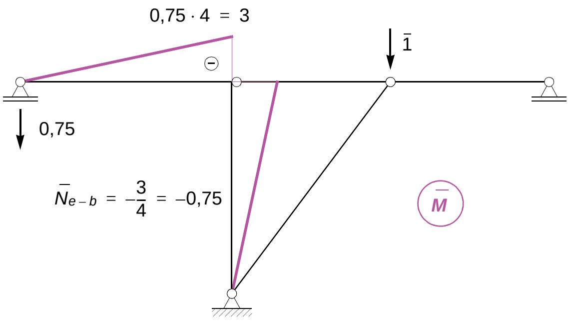
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}044693 \\ -0{,}094972 \end{bmatrix} \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_c und Auswertung der Arbeitsgleichung



$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I} \int M \bar{M}\, dx - EI_c \cdot [\bar{N}_{e-b} \cdot (-1)]$$

$$\eta'_c = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-0{,}08939 EI_c) + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 0{,}09497 EI_c$$

$$-EI_c \cdot [(-0{,}75) \cdot (-1)]$$

$$= -0{,}77235 EI_c \Rightarrow \eta_c = -0{,}77235$$

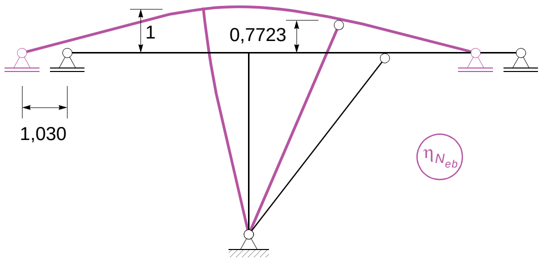
- Darstellung der Einflusslinie

Der Punkt c kann sich aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe nur rechtwinklig zur Achse des Stabes $e-c$ verschieben. Damit folgt die Horzontalverschiebung des Punktes c geometrisch aus der Vertikalkomponente der Verschiebung mit:

$$\eta_{c,h} = 0{,}77235 \cdot \frac{4}{3} = 1{,}0298 \text{ nach links}$$

Alle Punkte des Riegels verschieben sich um $\eta_{c,h}$ nach links. Da im Stab $e-b$ die Spreizung von „–1“ vorhanden ist, verschiebt sich der Punkt b um den Wert „1“ nach oben.

Mit den berechneten Ordinaten und den bekannten Krümmungen aus der Momentenlinie kann die Einflusslinie qualitativ gezeichnet werden.



2. Ermittlung der Einflusslinie für $Q_{c,\,re}$, $\eta_{c,\,li}$

- δ-Werte

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}33333 \cdot (-1) = 0{,}33333 EI_c$$

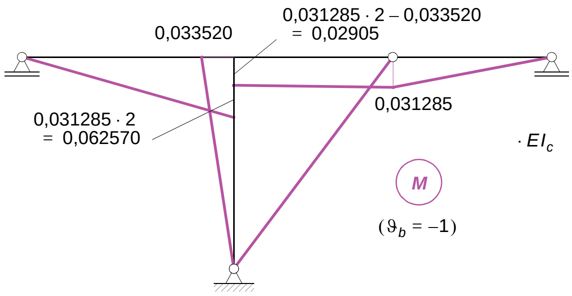
$$\delta'_{20} = -EI_c \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 13{,}333 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}33333 \\ 0 \end{bmatrix} EI_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}031285 \\ -0{,}033520 \end{bmatrix} \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$



- Auswertung der Arbeitsgleichung zur Berechnung von η_c

Die nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Querkraft recht von Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I} \int M \bar{M}\, dx - EI_c \cdot [\bar{Q}_{c,\,re} \cdot (-1)]$$

$$\eta'_c = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 0{,}062570 EI_c + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 0{,}033520 EI_c$$

$$= -0{,}384358 EI_c \Rightarrow \eta_c = -0{,}384358$$

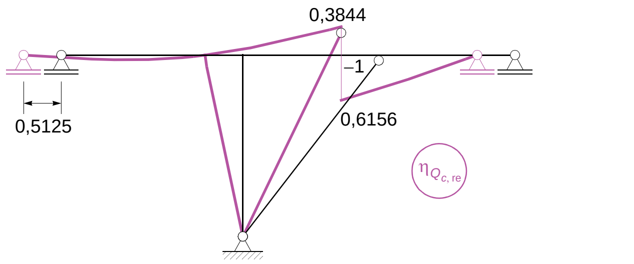
- Darstellung der Einflusslinie

Ermittlung der Horzontalverschiebung des Punktes c geometrisch aus der Vertikalkomponente:

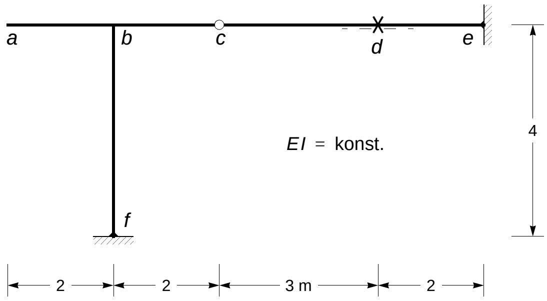
$$\eta_{c,h} = 0{,}384358 \cdot \frac{4}{3} = 0{,}51248 \text{ nach links}$$

Alle Punkte des Riegels verschieben sich um $\eta_{c,h}$ nach links. Die Vertikalverschiebung des Punktes b ist gleich null. Im Punkt c ist die Klaffung von „–1 “ vorhanden.

Mit den berechneten Ordinaten und den bekannten Krümmungen aus der Momentenlinie kann die Einflusslinie qualitativ gezeichnet werden.

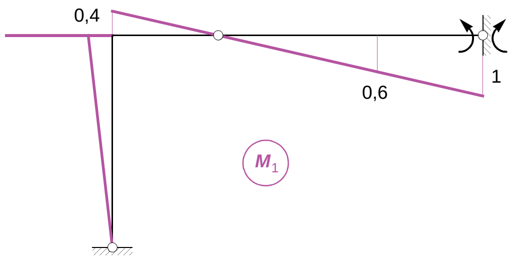


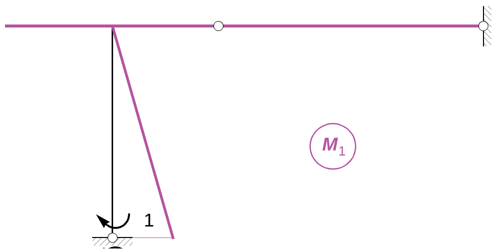
Aufgabe 4.5



Ermittlung der Einflusslinie für M_d, η_a, η_c, η_d

- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c / I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{11} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}4^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}4^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 1{,}9867$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = -4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}2667$$

$$\delta'_{22} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 1{,}3333$$

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}6 \cdot (-1) = 0{,}6EI_c$$

$$\delta'_{20} = -EI_c \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

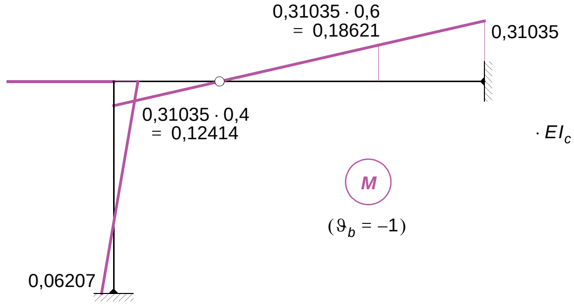
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1{,}9867 & -0{,}2667 \\ -0{,}2667 & 1{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} EI_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

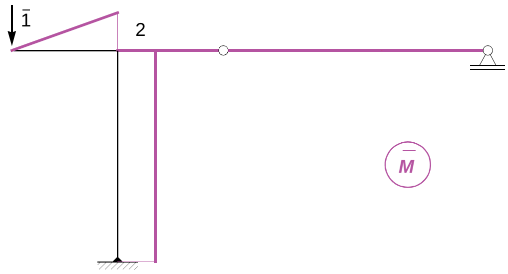
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}31035 \\ -0{,}06207 \end{bmatrix} \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_a und Auswertung der Arbeitsgleichung



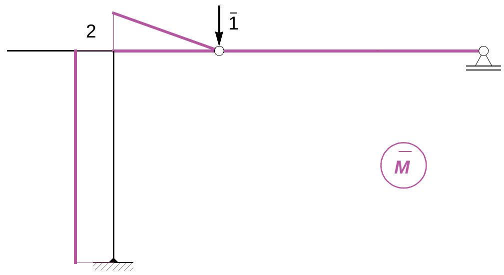
Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_a = \frac{I_c}{I} \int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_d \cdot (-1)]$$

$$\eta'_a = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0{,}12414 - 0{,}06207) EI_c$$

$$= 0{,}24828 EI_c \Rightarrow \eta_a = 0{,}24828$$

- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_c und Auswertung der Arbeitsgleichung



Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

$$\bar{1} \cdot \eta'_c = \frac{I_c}{I} \int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_d \cdot (-1)]$$

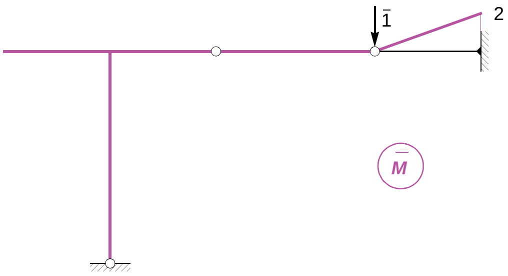
$$\eta'_c = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (0{,}12414 - 0{,}06207) EI_c$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot 0{,}12414 EI_c$$

$$= -0{,}41379 EI_c \Rightarrow \eta_c = -0{,}41379$$

- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_d und Auswertung der Arbeitsgleichung

Für die Berechnung dieser Ordinate wurde für den Reduktionssatz eine anderes Hauptsystem zugrunde gelegt, da es die Berechnung vereinfacht.



Das nachfolgend farbig gekennzeichnete virtuelle Moment im Punkt d ist gleich null, daher entfällt der Term der äußeren Arbeit.

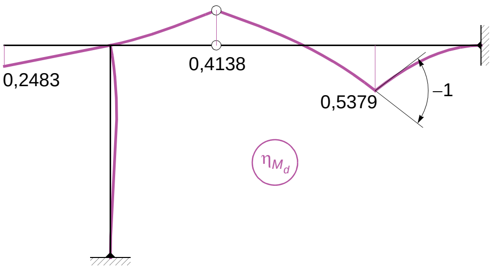
$$\bar{1} \cdot \eta'_d = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_d \cdot (-1)]$$

$$\eta'_d = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot (2 \cdot (-0{,}31035) - 0{,}18621)EI_c$$

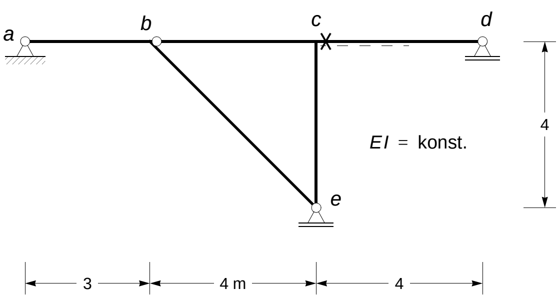
$$= 0{,}53793 EI_c \Rightarrow \eta_d = 0{,}53793$$

- Darstellung der Einflusslinie

Der Punkt b kann sich aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe nicht verschieben. Im Punkt d ist der Knick „–1 " vorhanden. Mit den berechneten Ordinaten und den bekannten Krümmungen aus der Momentenlinie kann die Einflusslinie qualitativ gezeichnet werden.

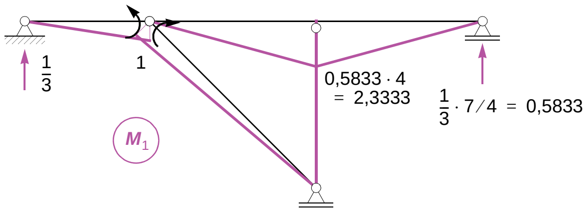


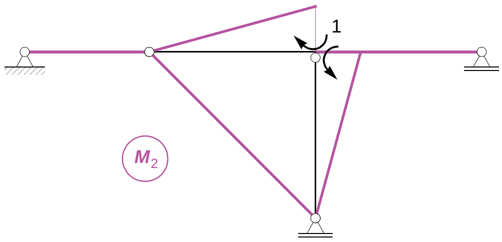
Aufgabe 4.6



Ermittlung der Einflusslinie für M_c, η_b

- Einheitsspannungszustände





- δ-Werte

Da die Biegesteifigkeit im gesamten System konstant ist, ist der Faktor I_c / I gleich eins und wird in der folgenden Berechnung weggelassen.

$$\delta'_{11} = (3 + 4 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2{,}3333^2 = 17{,}4041$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = -4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2{,}3333 = -3{,}1111$$

$$\delta'_{22} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^2 = 2{,}6667$$

$$\delta'_{10} = -EI_c \cdot 0{,}6 \cdot (-1) = 2{,}3333 EI_c$$

$$\delta'_{20} = -EI_c \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

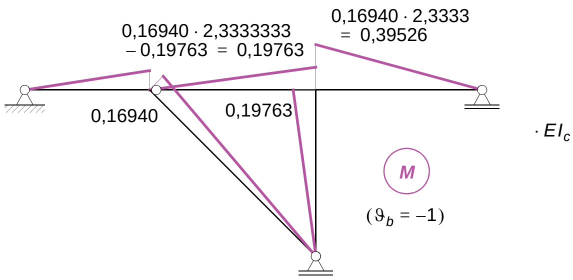
- Gleichungssystem (Verformungsbedingungen) und Lösung

$$\begin{bmatrix} 17{,}4041 & -3{,}1111 \\ -3{,}1111 & 2{,}6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}3333 \\ 0 \end{bmatrix} EI_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

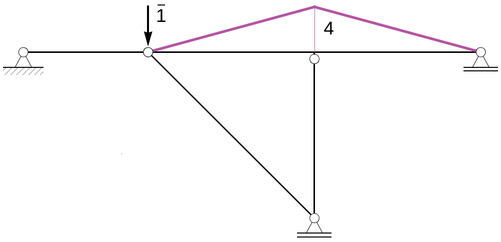
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}16940 \\ -0{,}19763 \end{bmatrix} \cdot EI_c$$

- Endgültige Momentenlinie

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$



- Virtueller Zustand zur Berechnung von η_b und Auswertung der Arbeitsgleichung



$$\bar{1} \cdot \eta'_b = \frac{I_c}{I}\int M\bar{M}\,dx - EI_c \cdot [\bar{M}_c \cdot (-1)]$$

$$\eta'_b = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0{,}19763 EI_c + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0{,}39526 EI_c$$

$$-EI_c \cdot [(-4) \cdot (-1)]$$

$$= -0{,}83796 EI_c \Rightarrow \eta_b = -0{,}83796$$

- Darstellung der Einflusslinie

Der Punkt c kann sich aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe nicht verschieben. Das Dreieck $b-c-e$ dreht sich um diesen Punkt. Daraus folgt, dass sich der Punkt e um den Betrag η_b nach links verschiebt. Im Punkt c ist der Knick „–1 “ vorhanden. Mit den bekannten Ordinaten und den bekannten Krümmungen aus der Momentenlinie kann die Einflusslinie qualitativ gezeichnet werden.