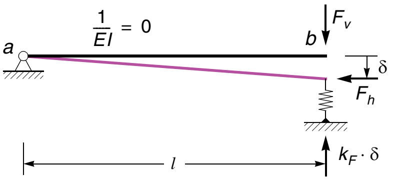
Aufgabe 1.1



$$\sum M_a = 0:$$

$$k_F \cdot \delta \cdot l - F_h \cdot \delta - F_v \cdot l = 0$$

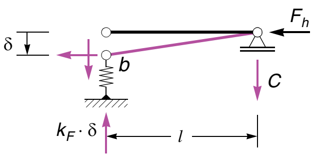
$$\delta = \frac{F_v \cdot l}{k_F \cdot l - F_h}$$

- Versagenslast

$$k_F \cdot l - F_h = 0 \Rightarrow F_h = k_F \cdot l$$

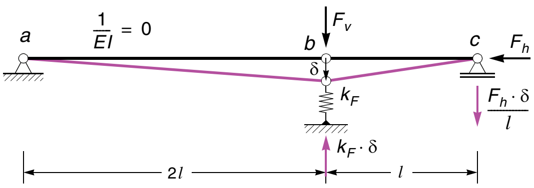
Aufgabe 1.2

- Teilsystem b – c



$$\sum M_b = 0: \qquad F_h \cdot \delta - C \cdot l = 0 \Rightarrow C = \frac{F_h \cdot \delta}{l}$$

- Gesamtsystem



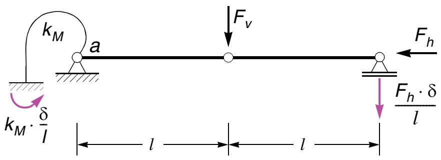
$$\sum M_a = 0: \qquad k_F \cdot \delta \cdot 2l - \frac{F_h \cdot \delta}{l} \cdot 3l - F_v \cdot 2l = 0$$

$$\delta = \frac{F_v \cdot 2l}{k_F \cdot 2l - 3F_h}$$

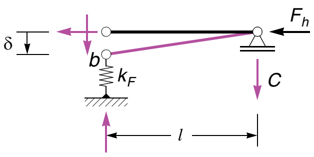
- Versagenslast

$$k_F \cdot 2l - 3F_h = 0 \Rightarrow F_h = \frac{2}{3} k_F \cdot l$$

Aufgabe 1.3

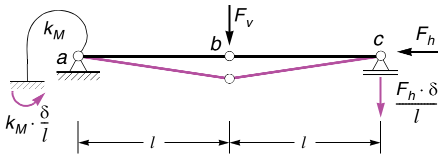


- Teilsystem b – c



$$\sum M_b = 0: \qquad F_h \cdot \delta - C \cdot l = 0 \Rightarrow C = \frac{F_h \cdot \delta}{l}$$

- Gesamtsystem



$$\sum M_a = 0: \qquad k_M \cdot \frac{\delta}{l} - \frac{F_h \cdot \delta}{l} \cdot 2l - F_v \cdot l = 0$$

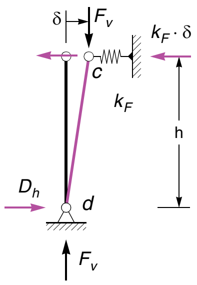
$$\delta = \frac{F_v \cdot l}{\frac{k_M}{l} - F_h \cdot 2}$$

- Versagenslast

$$\frac{k_M}{l} - F_h \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_h = \frac{k_M}{2l}$$

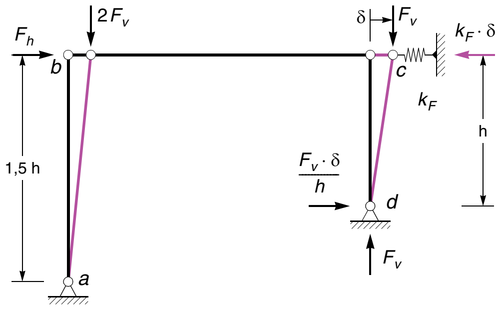
Aufgabe 1.4

- Teilsystem c – d



$$\sum M_c = 0: \qquad D_h \cdot h - F_v \cdot \delta = 0 \Rightarrow D_h = \frac{F_v \cdot \delta}{h}$$

- Gesamtsystem



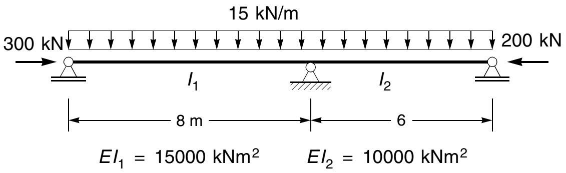
$$\sum M_a = 0: \quad k_F \cdot \delta \cdot 1.5h - 2F_v \cdot \delta - \frac{F_v \cdot \delta}{h} \cdot 0.5h - F_h \cdot 1.5h = 0$$

$$\delta = \frac{F_h \cdot 1.5h}{k_F \cdot 1.5h - 2F_v - F_v \cdot 0.5} = \frac{F_h \cdot 1.5h}{k_F \cdot h - \frac{5}{3}F_v}$$

- Versagenslast

$$k_F \cdot h - \frac{5}{3}F_v = 0 \Rightarrow F_v = \frac{3}{5} k_F \cdot h$$

Aufgabe 1.5

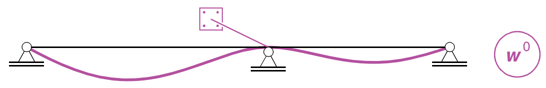


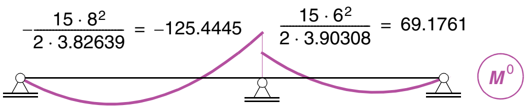
Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

$$\varepsilon_{ab} = 8 \cdot \sqrt{\frac{300}{15000}} = 1.13137 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ab} = 3.82639 \\ \gamma_{ab} = 2.73407 \end{cases}$$

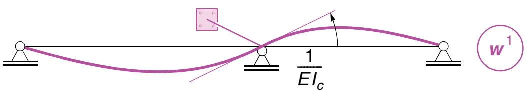
$$\varepsilon_{bc} = 6 \cdot \sqrt{\frac{200}{10000}} = 0.84853 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{bc} = 3.90308 \\ \gamma_{bc} = 2.85294 \end{cases}$$

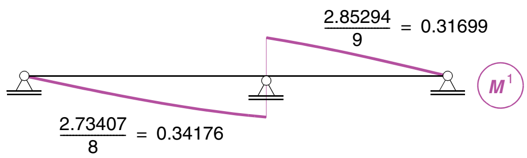
Lastverformungszustand





Einheitsverformungszustand





Gleichgewichtsbedingung und Lösung

$$\sum M_b = (0.34176 + 0.31699) \cdot Y_1 - 125.4445 + 69.1761 = 0$$

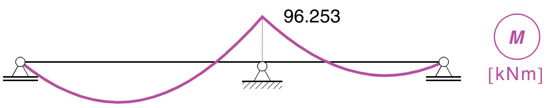
$$0.65875 \cdot Y_1 - 56.2684 = 0$$

$$Y_1 = 85.4167$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

$$M = M^0 + M^1 \cdot Y_1$$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -125.4445 & 0.34176 \\ 69.1761 & 0.31699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 85.4167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96.253 \\ 96.253 \end{bmatrix}$$



Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ab} = 8 \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 300}{15000}} = 1.13137 \cdot \sqrt{\lambda}$$

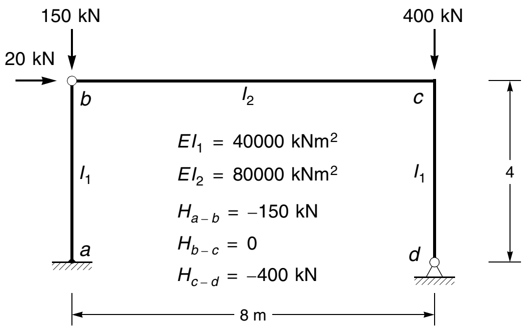
$$\varepsilon_{bc} = 6 \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 200}{10000}} = 0.84853 \cdot \sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{ab}}{8} + \frac{\gamma_{bc}}{9}\right) \cdot Y_1 = 0$$

$$\frac{\gamma_{ab}}{8} + \frac{\gamma_{bc}}{9} = 0$$

$$\lambda = 9.243$$

Aufgabe 1.6



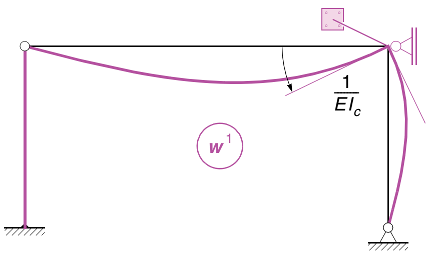
Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

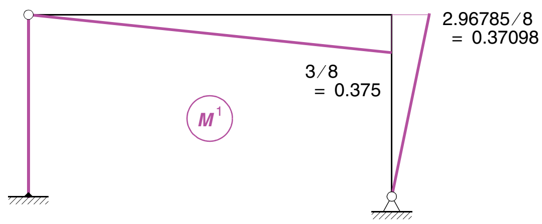
$$\varepsilon_{ab} = 4\sqrt{\frac{150}{40000}} = 0.24495 \Rightarrow \gamma_{ab} = 2.98798$$

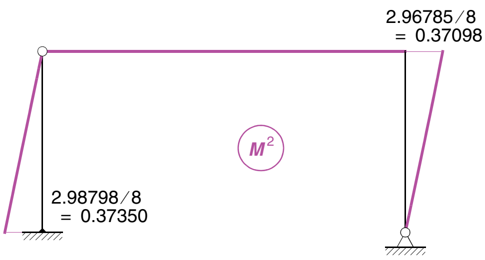
$$\varepsilon_{cd} = 4\sqrt{\frac{400}{40000}} = 0.4 \Rightarrow \gamma_{bc} = 2.96785$$

Lastverformungszustand

Einheitsverformungszustände







- Virtueller Zustand

Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_c = (0.37098 + 0.375) \cdot Y_1 + 0.37098 \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \overline{W} = 0.37098 \cdot 1 \cdot Y_1 + (0.37350 + 0.37098 - (0.005 + 0.001875) \cdot 4) \cdot 1 \cdot Y_2 - (20 + 0.75 + 2) \cdot 4 = 0$$

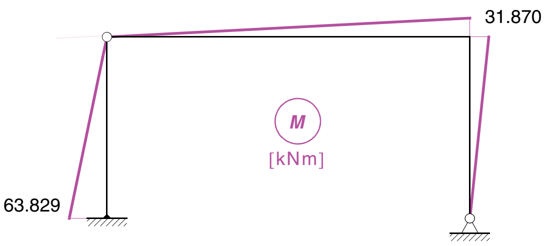
Gleichungssystem und Lösung

$$\begin{bmatrix} 0.74598 & 0.37098 \\ 0.37098 & 0.71698 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -84.9877 \\ 170.8961 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

$$M = M^0 + \sum M^i \cdot Y_i$$

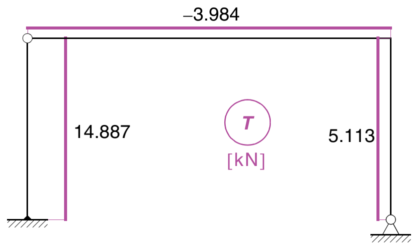
$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.37350 \\ 0.375 & 0 \\ 0.37098 & 0.37098 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -84.9877 \\ 170.8961 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63.829 \\ -31.870 \\ 31.870 \end{bmatrix}$$

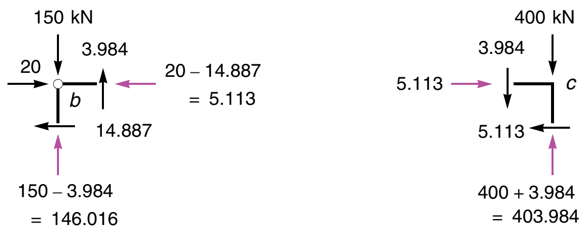


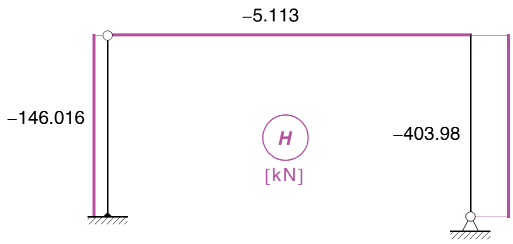
Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

$$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H \cdot \psi^*$$

Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum \psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-b$	15.957	−150	$\frac{170.8961}{80000} + \frac{1}{200} = 0.0071362$	0	14.887
$b-c$	−3.984	0	0	0	−3.984
$c-d$	7.9676	−400	$\frac{170.8961}{80000} + \frac{1}{200} = 0.0071362$	0	5.113







Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ab} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 150}{40000}} = 0.24495\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{cd} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot 400}{40000}} = 0.4\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{cd}}{8} + 0.375\right) \cdot Y_1 + \frac{\gamma_{cd}}{8} \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \overline{W} = \frac{\gamma_{cd}}{8} \cdot Y_1 + \left(\frac{\gamma_{ab} + \gamma_{cd}}{8} - \frac{\lambda \cdot (150 + 400)}{80000} \cdot 4\right) \cdot 1 \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_{cd}}{8} + 0.375 & \frac{\gamma_{cd}}{8} \\ \frac{\gamma_{cd}}{8} & \frac{\gamma_{ab} + \gamma_{cd}}{8} - \frac{\lambda \cdot (150 + 400)}{80000} \cdot 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\gamma_{cd}}{8} + 0.375\right)\left(\frac{\gamma_{ab} + \gamma_{cd}}{8} - \frac{\lambda \cdot (150 + 400)}{80000} \cdot 4\right) - \left(\frac{\gamma_{cd}}{8}\right)^2 = 0$$

$\lambda = 18.575$

Knickfigur

$\varepsilon_{ab} = 0.24495\sqrt{\lambda} = 0.24495\sqrt{18.575} = 1.05570$

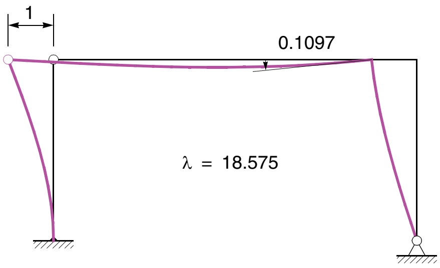
$\varepsilon_{cd} = 0.4\sqrt{\lambda} = 0.4\sqrt{18.575} = 1.72395$

$\gamma_{ab} = 2.76963$

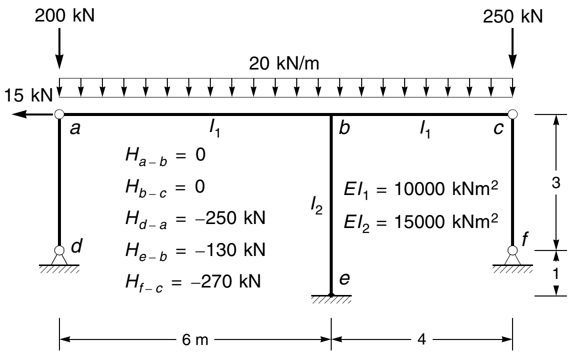
$\gamma_{cd} = 2.34735$

$$\begin{bmatrix} 0.66842 & 0.29342 \\ 0.29342 & 0.12881 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Y_1 = -0.43897$



Aufgabe 1.7



Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

$$\varepsilon_{eb} = 4\sqrt{\frac{130}{15000}} = 0.37238 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{eb} = 3.98148 \\ \beta_{eb} = 2.00464 \end{cases}$$

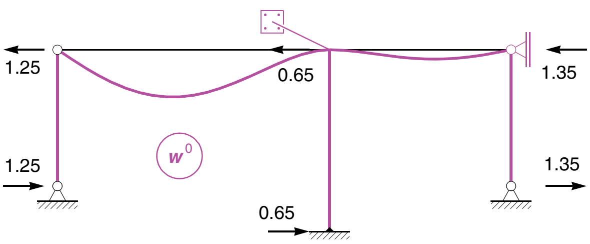
Lastverformungszustand

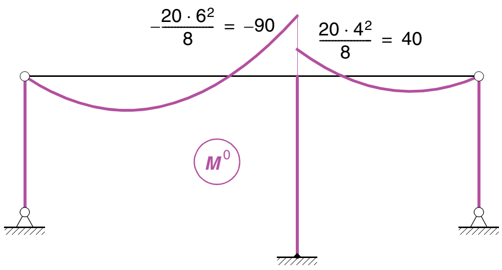
- Ersatzkräftepaare

$H_{d-a} \cdot \psi_0 = \dfrac{250}{200} = 1.25$

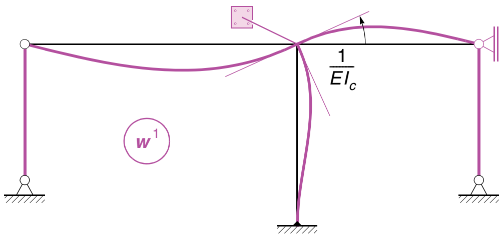
$H_{e-b} \cdot \psi_0 = \dfrac{130}{200} = 0.65$

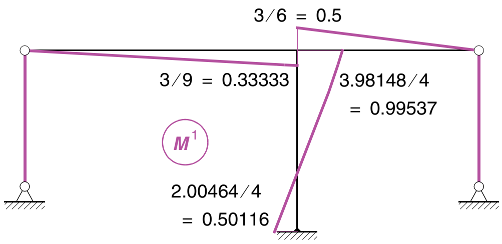
$H_{f-c} \cdot \psi_0 = \dfrac{270}{200} = 1.35$





Einheitsverformungszustände



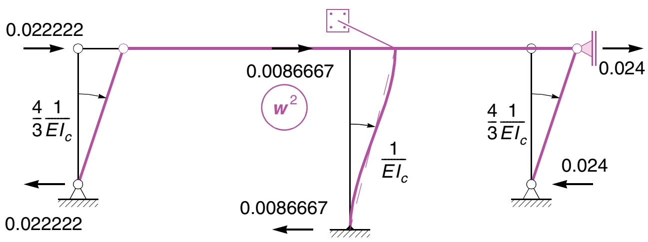


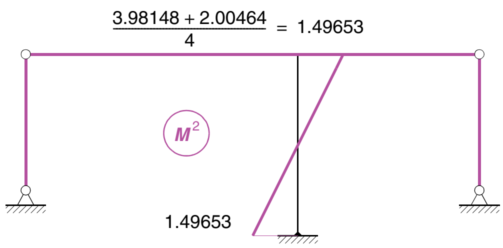
- Ersatzkräftepaare

$H_{d-a} \cdot \psi_{ad} = \dfrac{250}{15000} \cdot \dfrac{4}{3} = 0.022222$

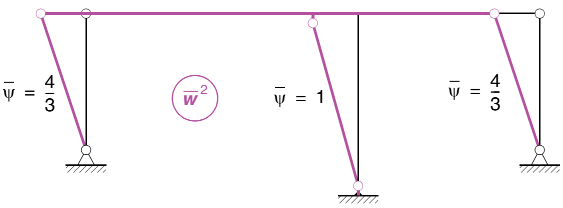
$H_{e-b} \cdot \psi_{be} = \dfrac{130}{15000} = 0.0086667$

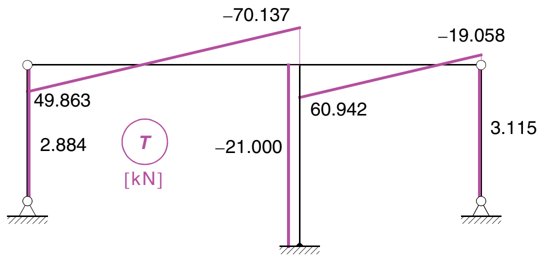
$H_{f-c} \cdot \psi_{cf} = \dfrac{270}{15000} \cdot \dfrac{4}{3} = 0.024$

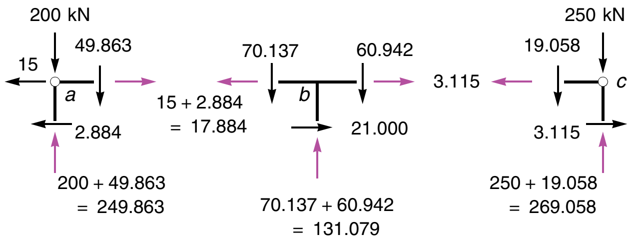


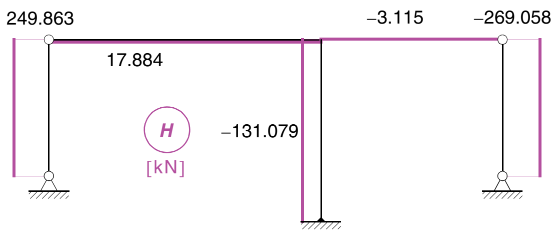


- Virtueller Zustand









Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_b = (0.33333 + 0.99537 + 0.5) \cdot Y_1 + 1.49653 \cdot Y_2 + 40 - 90 = 0$$

$$\sum \bar{W} = (0.99537 + 0.50116) \cdot 1 \cdot Y_1 + \left[2 \cdot 1.49653 \cdot 1 - (0.022222 + 0.0086667 + 0.024) \cdot 4\right] \cdot Y_2 + (15 + 1.25 + 0.65 + 1.35) \cdot 4 = 0$$

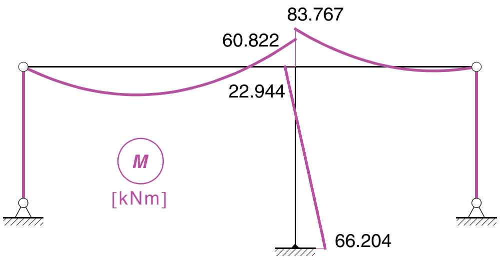
Gleichungssystem und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1.82870 & 1.49653 \\ 1.49653 & 2.77350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -50 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87.5334 \\ -73.5518 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

$$M = M^0 + \sum M^i \cdot Y_i$$

$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{be} \\ M_{eb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & 0.33333 & 0 \\ 40 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.99537 & 1.49653 \\ 0 & 0.50116 & 1.49653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 87.5334 \\ -73.5518 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60.822 \\ 83.767 \\ -22.944 \\ -66.204 \end{bmatrix}$$



Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

$$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H \cdot \psi^*$$

Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum \psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-d$	0	−250	$\frac{-73.5518}{15000} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{200} = -0.011538$	0	2.884
$b-e$	−22.287	−130	$\frac{-73.5518}{15000} - \frac{1}{200} = -0.0099035$	0	−21.000
$c-f$	0	−270	$\frac{-73.5518}{15000} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{200} = -0.011538$	0	3.115
$a-b$	−10.137	0	0	60	49.863
				−60	−70.137
$b-c$	20.942	0	0	40	60.942
				−40	−19.058

Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{e-b} = 4\sqrt{\frac{\lambda \cdot 130}{15000}} = 0.37238\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(0.33333 + \frac{\alpha_{eb}}{4} + 0.5\right) \cdot Y_1 + \frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4} \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \bar{W} = \left(\frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4}\right) \cdot 1 \cdot Y_1 + \left[2 \cdot \frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4} \cdot 1 - \lambda(0.022222 + 0.0086667 + 0.024) \cdot 4\right] \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.83333 + \frac{\alpha_{eb}}{4} & \frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4} \\ \frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4} & \frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{2} - \lambda \cdot 0.21956 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(0.83333 + \frac{\alpha_{eb}}{4}\right)\left(\frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{2} - \lambda \cdot 0.21956\right) - \left(\frac{\alpha_{eb} + \beta_{eb}}{4}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = 7.91512$$

Knickfigur

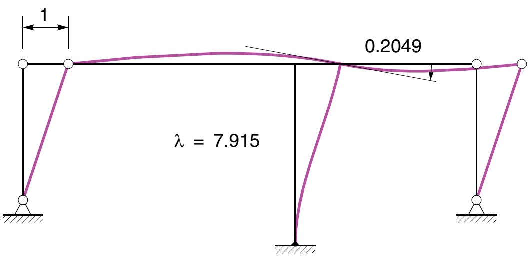
$$\varepsilon_{eb} = 0.37238\sqrt{7.91512} = 1.04765$$

$$\alpha_{eb} = 3.85150$$

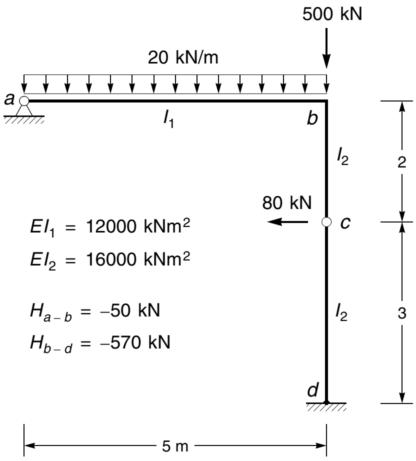
$$\beta_{eb} = 2.03787$$

$$\begin{bmatrix} 1.79621 & 1.47234 \\ 1.47234 & 1.20688 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = -0.81969$$



Aufgabe 1.8



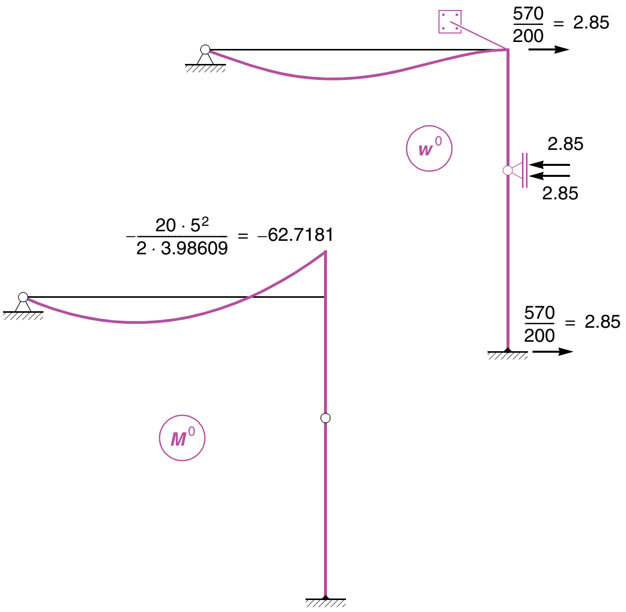
Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

$$\varepsilon_{ab} = 5\sqrt{\frac{50}{12000}} = 0.32275 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{ab} = 3.98609 \\ \gamma_{ab} = 2.97910\end{cases}$$

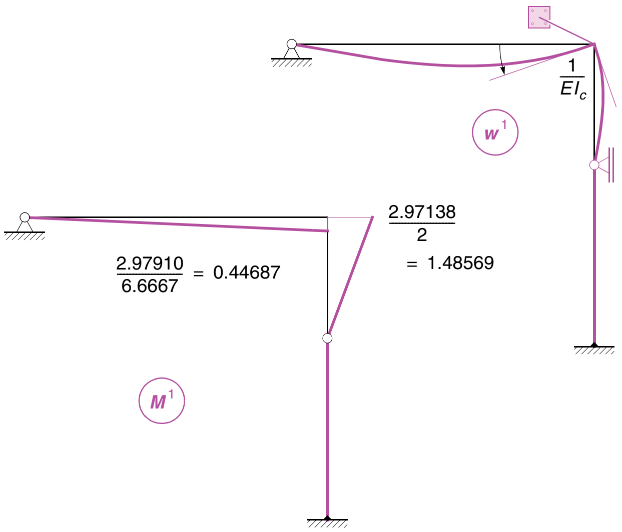
$$\varepsilon_{bc} = 2\sqrt{\frac{570}{16000}} = 0.37749 \Rightarrow \gamma_{bc} = 2.97138$$

$$\varepsilon_{cd} = 3\sqrt{\frac{570}{16000}} = 0.56624 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.93528$$

Lastverformungszustand



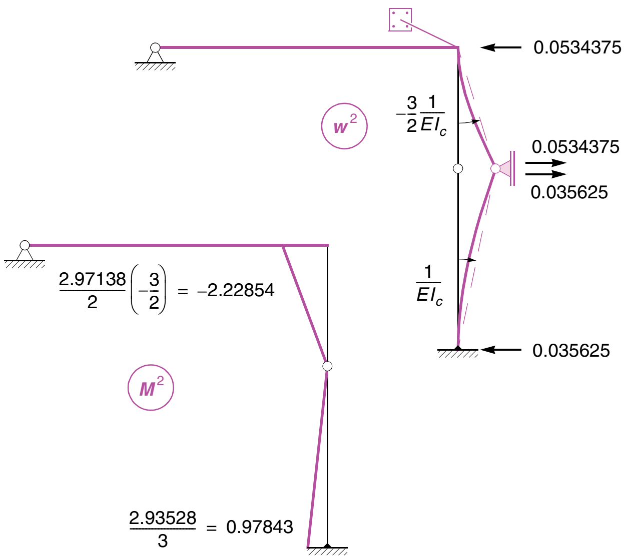
Einheitsverformungszustände



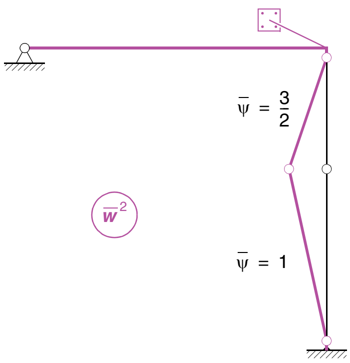
- Ersatzkräftepaare

$$H_{bc} \cdot \psi_{bc} = \frac{570}{16000} \cdot \frac{3}{2} = 0.0534375$$

$$H_{cd} \cdot \psi_{cd} = \frac{570}{16000} = 0.035625$$



- Virtueller Zustand



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_b = (0.44687 + 1.48569) \cdot Y_1 - 2.22854 \cdot Y_2 - 62.718069 = 0$$

$$\sum \overline{W} = (1.4856916) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot Y_1 + \left[-2.22854 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0.97843 \cdot 1 - (0.0534375 + 0.035625) \cdot 3\right] \cdot Y_2 + (80 + 2 \cdot 2.85) \cdot 3 = 0$$

Gleichungssystem und Lösung

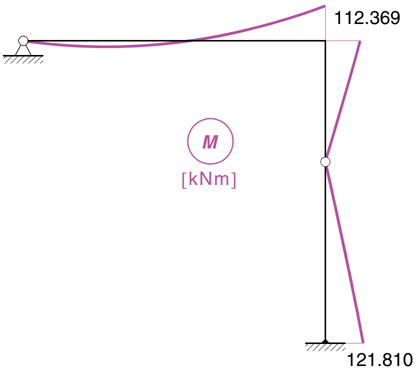
$$\begin{bmatrix} 1.93256 & -2.22854 \\ -2.22854 & 4.05405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -62.7181 \\ 257.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -111.1096 \\ -124.4959 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

$$M = M^0 + \sum M^i \cdot Y_i$$

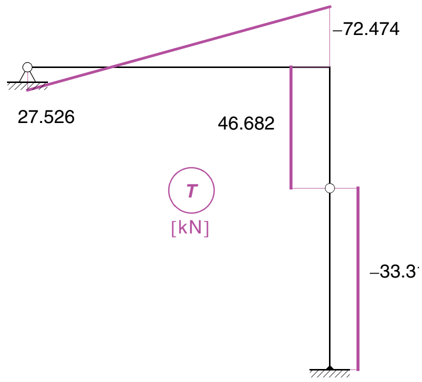
$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \\ M_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62.7181 & 0.44687 & 0 \\ 0 & 1.48569 & -2.22854 \\ 0 & 0 & 0.97843 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -111.1096 \\ -124.4959 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -112.369 \\ 112.369 \\ -121.810 \end{bmatrix}$$

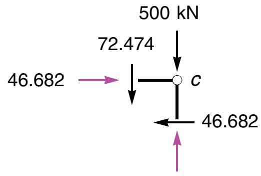


Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

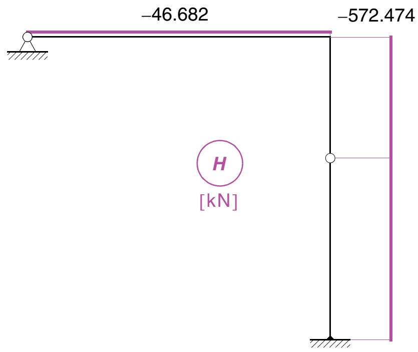
$$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H \cdot \psi^*$$

Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum \psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-b$	-22.474	-50	0	50	27.526
				-50	-72.474
$b-c$	56.185	-570	$\frac{-124.4959}{16000}\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{200} = 0.016671$	0	46.682
$c-d$	-40.603	-570	$\frac{-124.4959}{16000} - \frac{1}{200} = -0.012781$	0	-33.318





$$500 + 72.474 = 572.474$$



Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ab} = 5\sqrt{\frac{\lambda \cdot 50}{12000}} = 0.32275\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{bc} = 2\sqrt{\frac{\lambda \cdot 570}{16000}} = 0.37749\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{cd} = 3\sqrt{\frac{\lambda \cdot 570}{16000}} = 0.56624\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{ab}}{6.6667} + \frac{\gamma_{bc}}{2}\right) \cdot Y_1 + \frac{\gamma_{bc}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \overline{W} = \frac{\gamma_{bc}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot Y_1 + \left[\frac{\gamma_{bc}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\gamma_{cd}}{3} \cdot 1 - \lambda(0.0534375 + 0.035625) \cdot 3\right] \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}\gamma_{bc} & -\frac{3}{4}\gamma_{bc} \\ -\frac{3}{4}\gamma_{bc} & \frac{9}{8}\gamma_{bc} + \frac{1}{3}\gamma_{cd} - 0.2671875\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{3}{20}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}\gamma_{bc}\right)\left(\frac{9}{8}\gamma_{bc} + \frac{1}{3}\gamma_{cd} - 0.2671875\lambda\right) - \left(\frac{3}{4}\gamma_{bc}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = 6.01276$$

Knickfigur

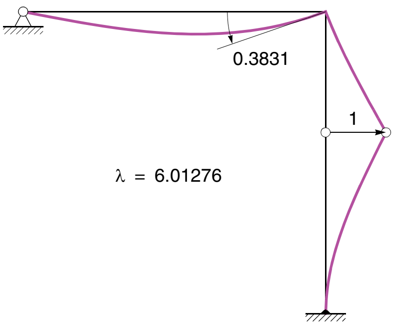
$$\varepsilon_{ab} = 0.32275\sqrt{\lambda} = 0.79141 \Rightarrow \gamma_{ab} = 2.87243$$

$$\varepsilon_{bc} = 0.37749\sqrt{\lambda} = 0.92564 \Rightarrow \gamma_{bc} = 2.82427$$

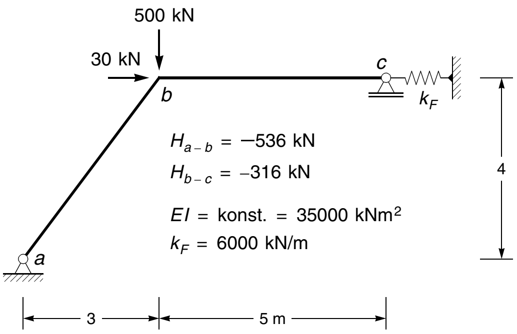
$$\varepsilon_{cd} = 0.56624\sqrt{\lambda} = 1.38847 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.59119$$

$$\begin{bmatrix} 1.84300 & -2.11821 \\ -2.11821 & 2.43451 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

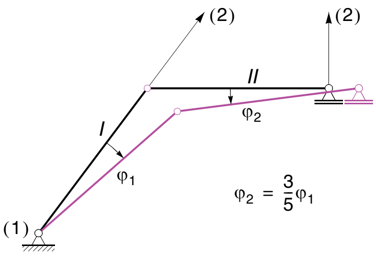
$$Y_1 = 1.14932$$



Aufgabe 1.9



Polplan

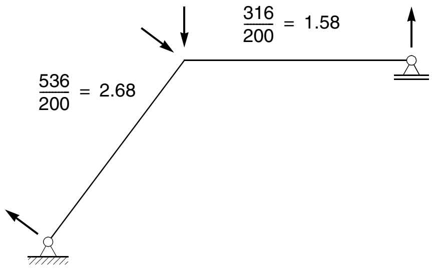


Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

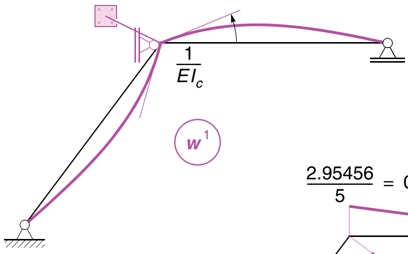
$$\varepsilon_{a-b} = 5\sqrt{\frac{536}{35000}} = 0.61875 \Rightarrow \gamma_{a-b} = 2.92258$$

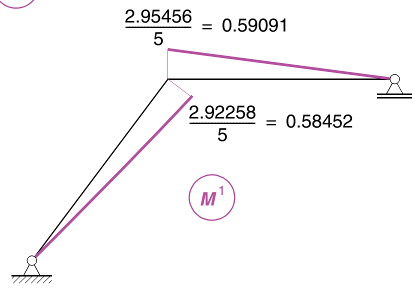
$$\varepsilon_{b-c} = 5\sqrt{\frac{316}{35000}} = 0.47509 \Rightarrow \gamma_{b-c} = 2.95456$$

Lastverformungszustand



Einheitsverformungszustände





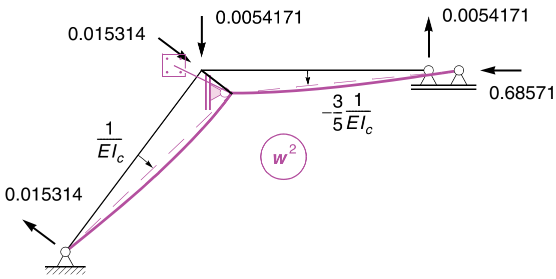
- Ersatzkräftepaare

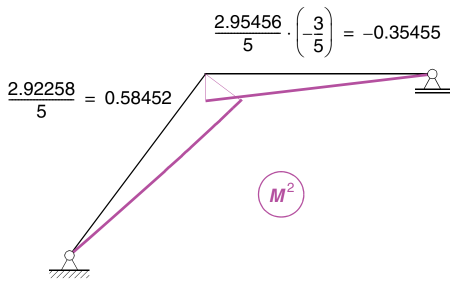
$$H_{ab} \cdot \psi_{ab} = \frac{536}{35000} = 0.015314$$

$$H_{bc} \cdot \psi_{bc} = \frac{316}{35000} \cdot \frac{3}{5} = 0.0054171$$

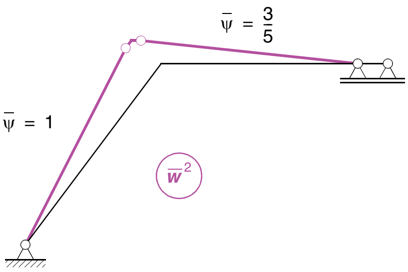
- Federkraft

$$F_{\text{Feder}} = k_F \cdot \delta_{c,h} = k_F \cdot \psi_{ab} \cdot 4 = 6000 \cdot \frac{4}{35000} = 0.68571$$





- Virtueller Zustand



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_b = (0.59091 + 0.58452) \cdot Y_1 + (0.58452 - 0.35455) \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \bar{W} = \left[0.58452 \cdot 1 + 0.59091 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot Y_1 + \left[0.58452 \cdot 1 - 0.35455 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 0.68571 \cdot 4 - (0.015314 \cdot 5 + 0.0054171 \cdot 3)\right] \cdot Y_2 = 0$$
$$-(500 \cdot 3) - (30 \cdot 4) - (2.68 \cdot 5 + 1.58 \cdot 3) = 0$$

Gleichungssystem und Lösung

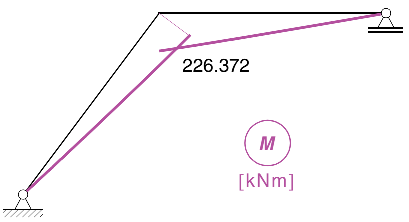
$$\begin{bmatrix} 1.17543 & 0.22997 \\ 0.22997 & 3.44728 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1638.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94.2000 \\ 481.4822 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

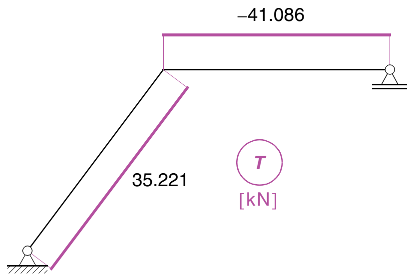
$$M = M^0 + \sum M^i \cdot Y_i$$

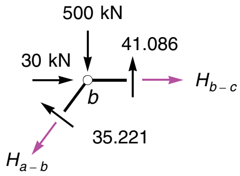
$$\begin{bmatrix} M_{ba} \\ M_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58452 & 0.58452 \\ 0.59091 & -0.35455 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -94.2000 \\ 481.4822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 226.372 \\ -226.372 \end{bmatrix}$$



Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H \cdot \psi^*$					
Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum \psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-b$	45.274	–536	$\frac{481.4822}{35000} + \frac{1}{200} = 0.018757$	0	35.221
$c-d$	–45.274	–316	$\frac{481.4822}{35000} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{1}{200} = -0.013254$	0	–41.086

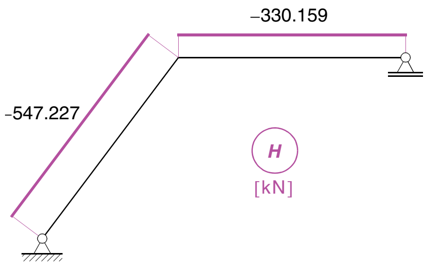




$$\frac{4}{5} H_{a-b} + 500 - 41.086 - \frac{3}{5} 35.221 = 0 \Rightarrow H_{a-b} = -547.227$$

$$H_{b-c} + 30 - \frac{4}{5} 35.221 + \frac{3}{5} 547.227 = 0 \Rightarrow H_{b-c} = -330.159$$

$$H_{b-c} = -0.68571 \cdot 481.4822 = -330.159$$



Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ab} = 5\sqrt{\frac{\lambda 536}{35000}} = 0.61875\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{bc} = 5\sqrt{\frac{\lambda 316}{35000}} = 0.47509\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{ab}}{5} + \frac{\gamma_{bc}}{5}\right) \cdot Y_1 + \left[\frac{\gamma_{ab}}{5} + \frac{\gamma_{bc}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \bar{W} = \left[\frac{\gamma_{ab}}{5} \cdot 1 + \frac{\gamma_{bc}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot Y_1 + \left[\frac{\gamma_{ab}}{5} \cdot 1 + \frac{\gamma_{bc}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 0.68571 \cdot 4 - \lambda(0.015314 \cdot 5 + 0.0054171 \cdot 3)\right] \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_{ab} + \gamma_{bc}}{5} & \frac{\gamma_{ab}}{5} - \frac{3}{25}\gamma_{bc} \\ \frac{\gamma_{ab}}{5} - \frac{3}{25}\gamma_{bc} & \frac{\gamma_{ab}}{5} + \frac{9}{125}\gamma_{bc} + 2.74286 - 0.092823\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\gamma_{ab}}{5} + \frac{\gamma_{bc}}{5}\right)\left(\frac{\gamma_{ab}}{5} + \frac{9}{125}\gamma_{bc} + 2.74286 - 0.092823\lambda\right) - \left(\frac{\gamma_{ab}}{5} - \frac{3}{25}\gamma_{bc}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = 27.34374$$

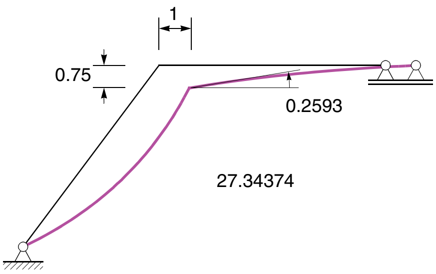
Knickfigur

$$\varepsilon_{ab} = 0.61875\sqrt{\lambda} = 3.23554 \Rightarrow \gamma_{ab} = -0.31403$$

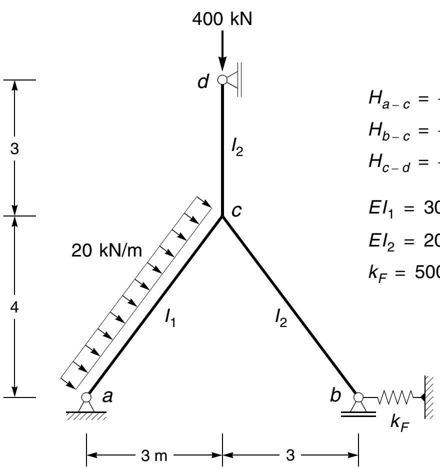
$$\varepsilon_{bc} = 0.47509\sqrt{\lambda} = 2.48432 \Rightarrow \gamma_{bc} = 1.46283$$

$$\begin{bmatrix} 0.22976 & -0.23834 \\ -0.23834 & 0.24725 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = 1.03736$$



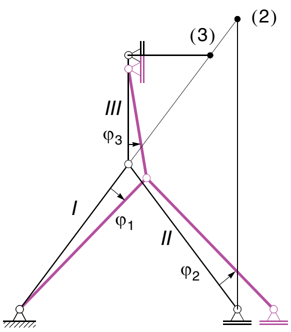
Aufgabe 1.10



$H_{a-c} = -320$ kN
$H_{b-c} = -145$ kN
$H_{c-d} = -400$ kN

$EI_1 = 30000$ kNm²
$EI_2 = 20000$ kNm²
$k_F = 500$ kN/m

Polplan



$$\varphi_2 = \varphi_1$$
$$\varphi_3 = \frac{4}{3}\varphi_1$$

Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

$$\varepsilon_{ac} = 5\sqrt{\frac{320}{30000}} = 0.51640 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ac} = 3.96432 \\ \gamma_{ac} = 2.94626 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{bc} = 5\sqrt{\frac{145}{20000}} = 0.42573 \Rightarrow \gamma_{bc} = 2.96356$$

$$\varepsilon_{cd} = 3\sqrt{\frac{400}{20000}} = 0.42426 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.96381$$

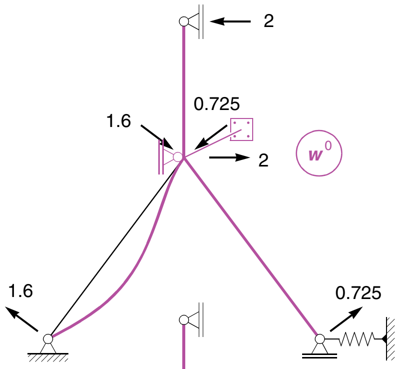
Lastverformungszustand

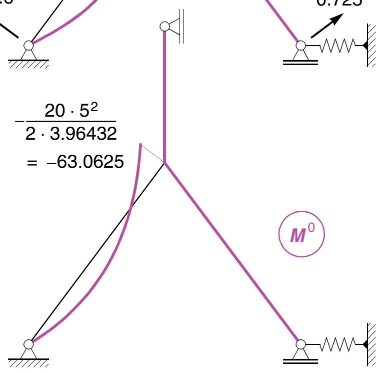
- Ersatzkräftepaare

$$H_{ac} \cdot \psi_0 = \frac{320}{200} = 1.6$$

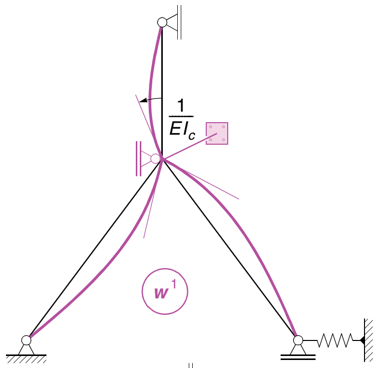
$$H_{bc} \cdot \psi_0 = \frac{145}{200} = 0.725$$

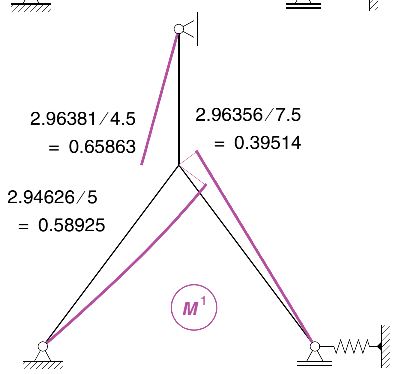
$$H_{cd} \cdot \psi_0 = \frac{400}{200} = 2$$





Einheitsverformungszustände





- Ersatzkräftepaare

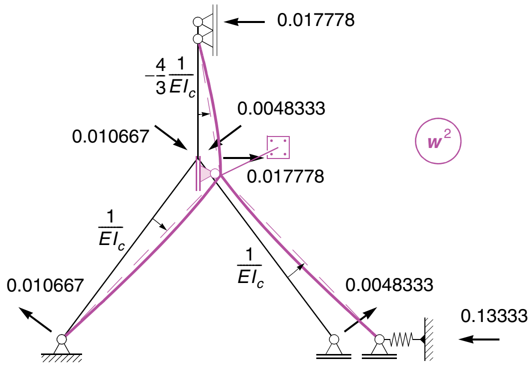
$$H_{ac}\cdot\psi_{ac} = \frac{320}{30000} = 0.010667$$

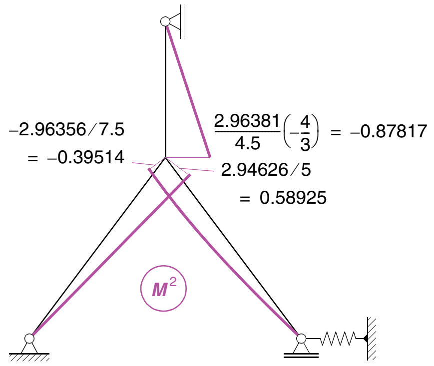
$$H_{bc}\cdot\psi_{bc} = \frac{145}{30000} = 0.0048333$$

$$H_{cd}\cdot\psi_{cd} = \frac{400}{30000}\cdot\frac{4}{3} = 0.017778$$

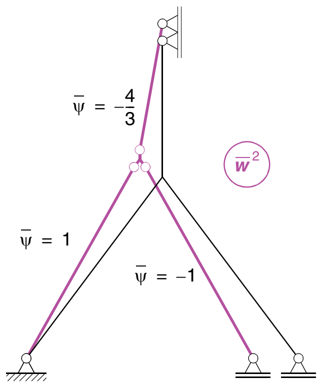
- Federkraft

$$F_{\text{Feder}} = k_F\cdot\delta_{b,h} = k_F\cdot\psi_{bc}\cdot 8 = 500\cdot\frac{8}{30000} = 0.13333$$





- Virtueller Zustand



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_b = (0.65863 + 0.58925 + 0.39514)\cdot Y_1$$
$$+ (0.58925 - 0.87817 - 0.39514)\cdot Y_2$$
$$- 63.0625 = 0$$

$$\sum \bar{W} = \left[0.58925\cdot 1 + 0.39514\cdot(-1) + 0.65863\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right]\cdot Y_1$$
$$+ \left[0.58925\cdot 1 - 0.39514\cdot(-1) - 0.87817\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right.$$
$$+ 0.13333\cdot 8$$
$$\left. - (0.010667\cdot 5 + 0.0048333\cdot 5 + 0.017778\cdot 4)\right]\cdot Y_2 = 0$$
$$- 400\cdot 3 - 20\cdot 5\cdot 2.5 - 63.0625\cdot 1$$
$$-(1.6\cdot 5 + 0.725\cdot 5 + 2\cdot 4) = 0$$

Gleichungssystem und Lösung

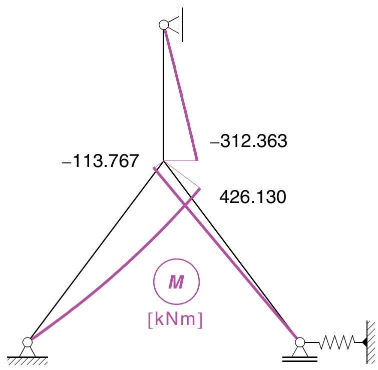
$$\begin{bmatrix} 1.64302 & -0.68406 \\ -0.68406 & 3.07334 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -63.0625 \\ -1532.6875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.1400 \\ 559.0544 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

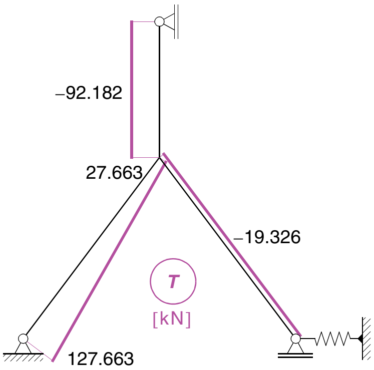
$$M = M^0 + \sum M^i\cdot Y_i$$

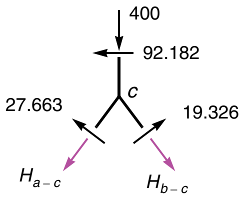
$$\begin{bmatrix} M_{ca} \\ M_{cb} \\ M_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63.0625 & 0.58925 & 0.58925 \\ 0 & 0.39514 & -0.39514 \\ 0 & 0.65863 & -0.87817 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 271.1400 \\ 559.0544 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 426.130 \\ -113.767 \\ -312.363 \end{bmatrix}$$



Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H\cdot\psi^*$					
Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum\psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-c$	85.226	-320	$\frac{559.0544}{30000} + \frac{1}{200} = 0.023635$	50	127.663
				-50	27.663
$b-c$	-22.753	-145	$-\frac{559.0544}{30000} - \frac{1}{200} = -0.023635$	0	-19.326
$c-d$	-104.121	-400	$\frac{559.0544}{30000}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{200} = -0.029847$	0	-92.182

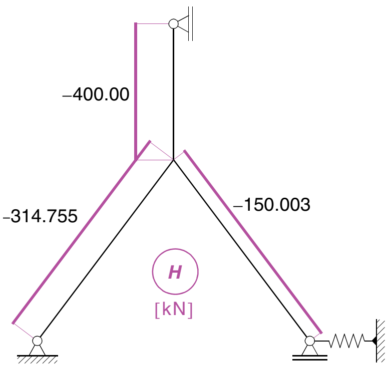




$$-\frac{3}{5}H_{a-c}+\frac{3}{5}H_{b-c}-92.182-\frac{4}{5}27.663+\frac{4}{5}19.326 = 0$$

$$\frac{4}{5}H_{a-c}+\frac{4}{5}H_{b-c}+400-\frac{3}{5}27.663-\frac{3}{5}19.326 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{a-c} \\ H_{b-c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.8517 \\ -371.8065 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_{a-c} \\ H_{b-c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -314.755 \\ -150.003 \end{bmatrix}$$



Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ac} = 5\sqrt{\frac{\lambda 320}{30000}} = 0.51634\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{bc} = 5\sqrt{\frac{\lambda 145}{20000}} = 0.42573\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{cd} = 3\sqrt{\frac{\lambda 400}{20000}} = 0.42426\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}+\frac{\gamma_{cd}}{4.5}\right)\cdot Y_1$$

$$+\left[\frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}\cdot(-1)+\frac{\gamma_{cd}}{4.5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right]\cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \overline{W} = \left[\frac{\gamma_{ac}}{5}\cdot 1+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}(-1)+\frac{\gamma_{cd}}{4.5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right]\cdot Y_1$$

$$+\left[\frac{\gamma_{ac}}{5}\cdot 1+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}\cdot(-1)\cdot(-1)+\frac{\gamma_{cd}}{4.5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+0.13333\cdot 8\right.$$
$$\left.-\lambda(0.010667\cdot 5+0.0048333\cdot 5+0.017778\cdot 4)\right]\cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}+\frac{\gamma_{c-d}}{4.5} & \frac{\gamma_{ac}}{5}-\frac{\gamma_{bc}}{7.5}-\frac{4\gamma_{cd}}{13.5} \\ \frac{\gamma_{ac}}{5}-\frac{\gamma_{bc}}{7.5}-\frac{4\gamma_{cd}}{13.5} & \frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}+\frac{16\gamma_{cd}}{40.5}+1.06667-0.14861\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}+\frac{\gamma_{c-d}}{4.5}\right)\left(\frac{\gamma_{ac}}{5}+\frac{\gamma_{bc}}{7.5}+\frac{16\gamma_{cd}}{40.5}+1.06667-0.14861\lambda\right)$$
$$-\left(\frac{\gamma_{ac}}{5}-\frac{\gamma_{bc}}{7.5}-\frac{4\gamma_{cd}}{13.5}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = 16.2189$$

Knickfigur

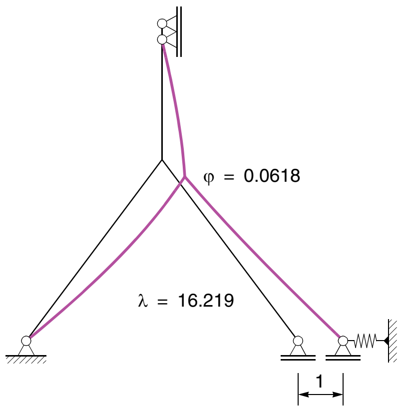
$\varepsilon_{ac} = 0.51634\sqrt{\lambda} = 2.07967 \Rightarrow \gamma_{ac} = 2.00213$

$\varepsilon_{bc} = 0.42573\sqrt{\lambda} = 1.71455 \Rightarrow \gamma_{bc} = 2.35517$

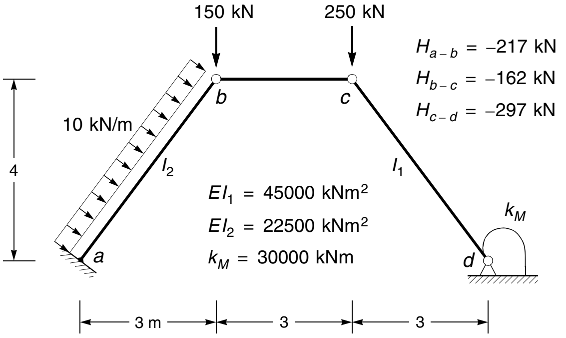
$\varepsilon_{cd} = 0.42426\sqrt{\lambda} = 1.70862 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.36006$

$$\begin{bmatrix} 1.23891 & -0.61287 \\ -0.61287 & 0.30318 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

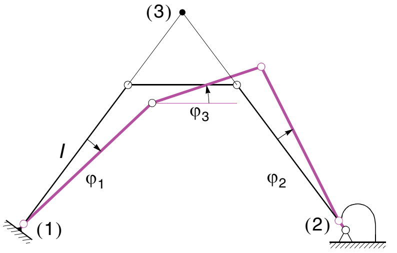
$$Y_1 = 0.49469$$



Aufgabe 1.11



Polplan



$\varphi_2 = \varphi_1$

$\varphi_3 = 2\varphi_1$

Ermittlung der Biegeformkoeffizienten

$$\varepsilon_{ab} = 5\sqrt{\frac{217}{22500}} = 0.49103 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{ab} = 3.96775 \\ \gamma_{ab} = 2.95144 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{cd} = 5\sqrt{\frac{297}{45000}} = 0.40620 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.96684$$

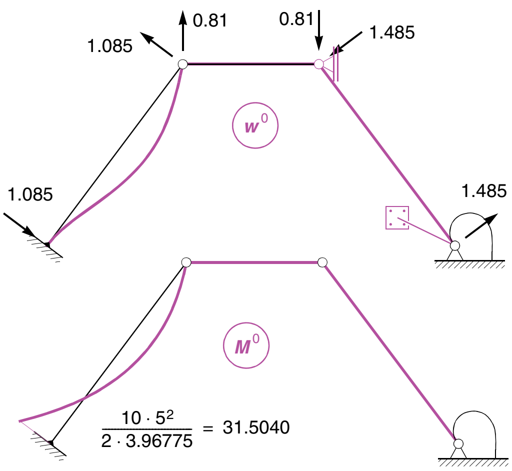
Lastverformungszustand

- Ersatzkräftepaare

$$H_{ab} \cdot \psi_0 = \frac{217}{200} = 1.085$$

$$H_{bc} \cdot \psi_0 = \frac{162}{200} = 0.81$$

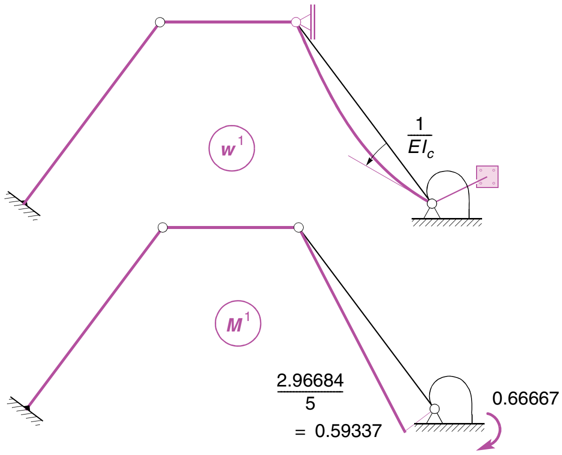
$$H_{cd} \cdot \psi_0 = \frac{297}{200} = 1.485$$



Einheitsverformungszustände

- Federmoment

$$M_{\text{Feder}} = k_M \cdot \varphi_d = 30000 \cdot \frac{1}{45000} = 0.66667$$

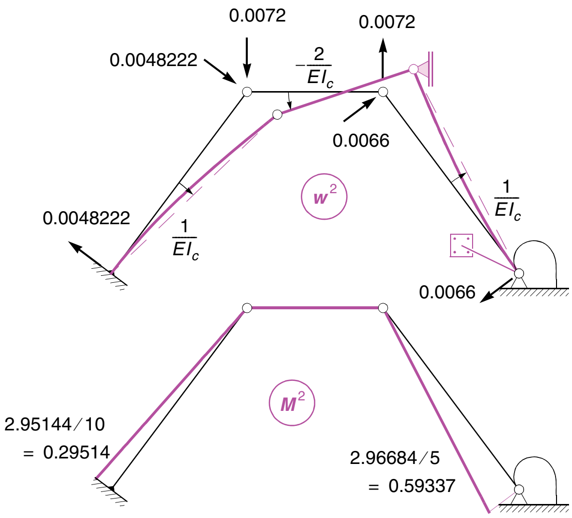


- Ersatzkräftepaare

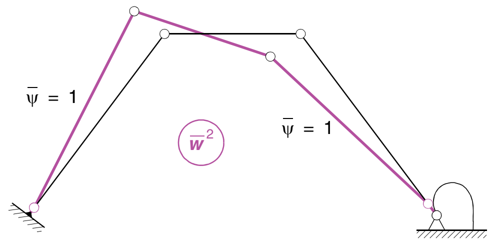
$$H_{ab} \cdot \psi_{ab} = \frac{217}{45000} = 0.0048222$$

$$H_{bc} \cdot \psi_{bc} = \frac{162}{45000} 2 = 0.0072$$

$$H_{cd} \cdot \psi_{cd} = \frac{297}{45000} = 0.0066$$



- Virtueller Zustand



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_b = (0.59337 + 0.66667) \cdot Y_1 + 0.59337 \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum \overline{W} = {} & 0.59337 \cdot 1 \cdot Y_1 + [0.29514 \cdot 1 + 0.59337 \cdot 1 \\ & - (0.0048222 \cdot 5 + 0.0066 \cdot 5 + 0.0072 \cdot 3 \cdot 2)] \cdot Y_2 = 0 \\ & - 150 \cdot 3 + 250 \cdot 3 - 10 \cdot 5 \cdot 2.5 + 31.5040 \cdot 1 \\ & + 1.085 \cdot 5 + 1.485 \cdot 5 + 0.81 \cdot 3 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

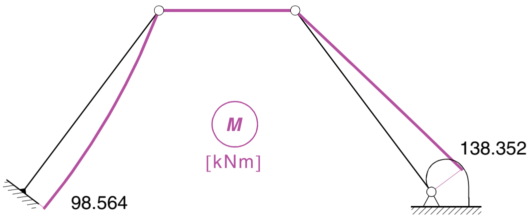
Gleichungssystem und Lösung

$$\begin{bmatrix} 1.26004 & 0.59337 \\ 0.59337 & 0.78820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 224.214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 207.5286 \\ -440.693 \end{bmatrix}$$

Endgültige Momentenlinie durch Superposition

$$M = M^0 + \sum M^i \cdot Y_i$$

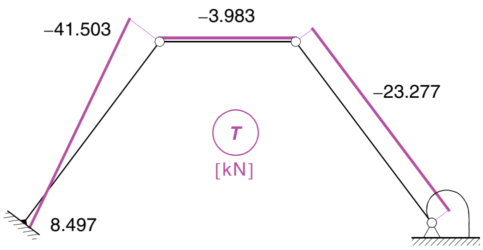
$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.5040 & 0 & 0.29514 \\ 0 & 0.59337 & 0.59337 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 207.5286 \\ -440.693 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98.564 \\ -138.352 \end{bmatrix}$$

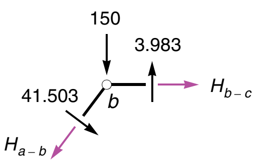


Ermittlung der Transversal- und Normalkräfte

$$T = T(q) + \frac{M_r - M_l}{l} + H \cdot \psi^*$$

Stab	$\frac{M_r - M_l}{l}$	H	$\psi^* = \sum \psi^i Y_i + \psi^0$	$T(q)$	T
$a-c$	-19.713	-217	$\frac{-440.693}{45000} - \frac{1}{200} = -0.014793$	25	8.497
				-25	-41.503
$b-c$	0	-162	$\frac{-440.693}{45000}(-2) + \frac{1}{200} = 0.024586$	0	-3.983
$c-d$	-27.670	-297	$\frac{-440.693}{45000} - \frac{1}{200} = -0.014793$	0	-23.277





$$\frac{4}{5} H_{a-c} + 150 - 3.983 + \frac{3}{5} 41.503 = 0$$

$$\Rightarrow H_{a-c} = -213.648$$

$$H_{b-c} + \frac{3}{5} 213.648 + \frac{4}{5} 41.503 = 0$$

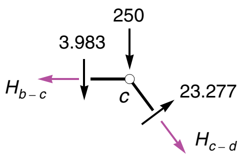
$$\Rightarrow H_{b-c} = -161.391$$

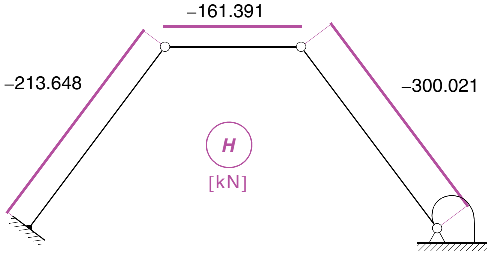
$$\frac{4}{5} H_{c-d} + 250 + 3.983 - \frac{3}{5} 23.277 = 0$$

$$\Rightarrow H_{a-c} = -300.021$$

$$H_{b-c} - \frac{3}{5} 300.021 + \frac{4}{5} 23.277 = 0$$

$$\Rightarrow H_{b-c} = -161.391$$





Ermittlung der Verzweigungslast

$$\varepsilon_{ab} = 5\sqrt{\frac{\lambda \cdot 217}{22500}} = 0.49103\sqrt{\lambda}$$

$$\varepsilon_{cd} = 5\sqrt{\frac{\lambda \cdot 297}{45000}} = 0.40620\sqrt{\lambda}$$

$$\sum M_b = \left(\frac{\gamma_{cd}}{5} + 0.66667\right) \cdot Y_1 + \frac{\gamma_{cd}}{5} \cdot Y_2 = 0$$

$$\sum \overline{W} = \frac{\gamma_{cd}}{5} \cdot 1 \cdot Y_1 + \left[\frac{\gamma_{ab}}{10} \cdot 1 + \frac{\gamma_{cd}}{5} \cdot 1 - \lambda(0.0048222 \cdot 5 + 0.0066 \cdot 5 + 0.0072 \cdot 3 \cdot 2)\right] \cdot Y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_{cd}}{5} + 0.66667 & \frac{\gamma_{cd}}{5} \\ \frac{\gamma_{cd}}{5} & \frac{\gamma_{ab}}{10} \cdot 1 + \frac{\gamma_{cd}}{5} \cdot 1 - 0.10031\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\gamma_{cd}}{5} + 0.66667\right)\left(\frac{\gamma_{ab}}{10} \cdot 1 + \frac{\gamma_{cd}}{5} \cdot 1 - 0.10031\lambda\right) - \left(\frac{\gamma_{cd}}{5}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = 5.74023$$

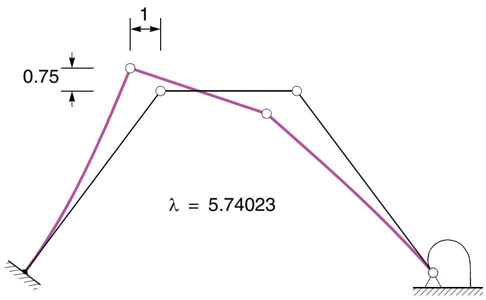
Knickfigur

$$\varepsilon_{a-b} = 0.49103\sqrt{\lambda} = 1.17645 \Rightarrow \gamma_{ab} = 2.71153$$

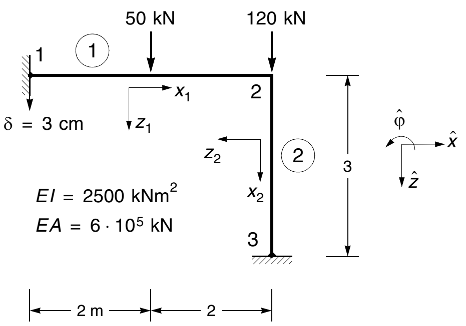
$$\varepsilon_{c-d} = 0.40620\sqrt{\lambda} = 0.97321 \Rightarrow \gamma_{cd} = 2.80522$$

$$\begin{bmatrix} 1.22771 & 0.561044 \\ 0.561044 & 0.256388 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = -0.45698$$



Aufgabe 2.5



Stab 1

- Lokale und globale Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{k}^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 150000 & 0 & 0 & -150000 & 0 & 0 \\ 0 & 468{,}8 & -937{,}5 & 0 & -468{,}8 & -937{,}5 \\ 0 & -937{,}5 & 2500 & 0 & 937{,}5 & 1250 \\ \hline -150000 & 0 & 0 & 150000 & 0 & 0 \\ 0 & -468{,}8 & 937{,}5 & 0 & 468{,}8 & 937{,}5 \\ 0 & -937{,}5 & 1250 & 0 & 937{,}5 & 2500 \end{array}\right]$$

- Vektor der Stabendschnittgrößen infolge der Einzelkraft

$$\boldsymbol{s}^{10} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -25 \\ 25 \\ \hline 0 \\ -25 \\ -25 \end{array}\right]$$

Stab 2

- Lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\boldsymbol{k}}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 1111{,}1 & -1666{,}7 & 0 & -1111{,}1 & -1666{,}7 \\ 0 & -1666{,}7 & 3333{,}3 & 0 & 1666{,}7 & 1666{,}7 \\ \hline -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -1111{,}1 & 1666{,}7 & 0 & 1111{,}1 & 1666{,}7 \\ 0 & -1666{,}7 & 1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 & 3333{,}3 \end{array}\right]$$

- Transformationsmatrix

Der Winkel α von der globalen zur lokalen x-Achse beträgt $-90°$. Mit $\sin\alpha = -1$ und $\cos\alpha = 0$ ergibt sich die Transformationsmatrix nach Gl. (2.5):

$$\boldsymbol{T}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Globale Steifigkeitsmatrix

Transformation nach Gl. (2.8):

$$\hat{\boldsymbol{k}}^2 = \boldsymbol{T}^{2^T}\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{T}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1111{,}1 & 0 & 1666{,}7 & -1111{,}1 & 0 & 1666{,}7 \\ 0 & 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 \\ 1666{,}7 & 0 & 3333{,}3 & -1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 \\ \hline -1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 & 1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 \\ 0 & -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 \\ 1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 & -1666{,}7 & 0 & 3333{,}3 \end{array}\right]$$

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Partitionierung der Elementmatrizen:

$$\hat{\boldsymbol{k}}^1 = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}^1_{11} & \hat{\boldsymbol{k}}^1_{12} \\ \hat{\boldsymbol{k}}^1_{21} & \hat{\boldsymbol{k}}^1_{22} \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{k}}^2 = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}^2_{22} & \hat{\boldsymbol{k}}^2_{23} \\ \hat{\boldsymbol{k}}^2_{32} & \hat{\boldsymbol{k}}^2_{33} \end{bmatrix}$$

Schematischer Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\boldsymbol{k}}_{ges} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}^1_{11} & \hat{\boldsymbol{k}}^1_{12} & \\ \hat{\boldsymbol{k}}^1_{21} & \hat{\boldsymbol{k}}^1_{22} + \hat{\boldsymbol{k}}^2_{22} & \hat{\boldsymbol{k}}^2_{23} \\ & \hat{\boldsymbol{k}}^2_{32} & \hat{\boldsymbol{k}}^2_{33} \end{bmatrix}$$

An den Knoten 1 und 3 sind alle Verformungen gleich null. Die Zeilen und Spalten 1, 2, 3 sowie 7, 8 und 9 können daher gestrichen werden. Damit ergibt sich das angegebene reduzierte Gleichungssystem.

Aufbau des Gesamtlastvektors

Der Elementlastvektor des Stabes 1 wird in den Zeilen 1 bis 6 in den Gesamtlastvektor addiert. Weiterhin ist die Einzelkraft von 120 kN am Knoten 2 in der 5. Zeile zu berücksichtigen.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{p}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -25 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -145 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die eingeprägte Auflagerverschiebung von 3 cm ergibt durch Multiplikation der 2. Spalte der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit 0.03 einen weiteren Anteil der rechten Seite.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -145 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 468.75 \\ -937.5 \\ 0 \\ -468.75 \\ -937.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 0.03 = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -145 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 14.0625 \\ -28.125 \\ 0 \\ -14.0625 \\ -28.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.9375 \\ -3.125 \\ 0 \\ -159.0625 \\ -53.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufbau des Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} 150000 & 0 & 0 & -150000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 468{,}8 & -937{,}5 & 0 & -468{,}8 & -937{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -937{,}5 & 2500 & 0 & 937{,}5 & 1250 & 0 & 0 & 0 \\ -150000 & 0 & 0 & 151111{,}1 & 0 & 1666{,}7 & -1111{,}1 & 0 & 1666{,}7 \\ 0 & -468{,}8 & 937{,}5 & 0 & 200468{,}8 & 937{,}5 & 0 & -200000 & 0 \\ 0 & -937{,}5 & 1250 & 1666{,}7 & 937{,}5 & 5833{,}3 & -1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & -1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 & 1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 & -1666{,}7 & 0 & 3333{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -145 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 468{,}8 \\ -937{,}5 \\ 0 \\ -468{,}8 \\ -937{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0.03 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduziertes Gleichungssystem nach Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} 151111{,}1 & 0 & 1666{,}7 \\ 0 & 200468{,}8 & 937{,}5 \\ 1666{,}7 & 937{,}5 & 5833{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -159{,}0625 \\ -53{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \end{bmatrix}$$

Ermittlung der Stabendschnittgrößen

Die Stabendschnittgrößen folgen aus Gl. (2.3) mit den bekannten Verformungen.

Stab 1

Vektor der globalen Stabendverformungen:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}03 \\ 0 \\ -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{s}^0$$

$$\begin{bmatrix} 150000 & 0 & 0 & -150000 & 0 & 0 \\ 0 & 468{,}8 & -937{,}5 & 0 & -468{,}8 & -937{,}5 \\ 0 & -937{,}5 & 2500 & 0 & 937{,}5 & 1250 \\ -150000 & 0 & 0 & 150000 & 0 & 0 \\ 0 & -468{,}8 & 937{,}5 & 0 & 468{,}8 & 937{,}5 \\ 0 & -937{,}5 & 1250 & 0 & 937{,}5 & 2500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}03 \\ 0 \\ -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ -25 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}9142 \\ -19{,}7411 \\ 8{,}8478 \\ -14{,}9142 \\ -30{,}2590 \\ -29{,}8836 \end{bmatrix}$$

Stab 2

Vektor der globalen Stabendverformungen:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lokale Stabendverformungen durch Rücktransformation:

$$\boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{T}^2 \hat{\boldsymbol{w}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0007513 \\ 0{,}0000994 \\ 0{,}0090148 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w}$$

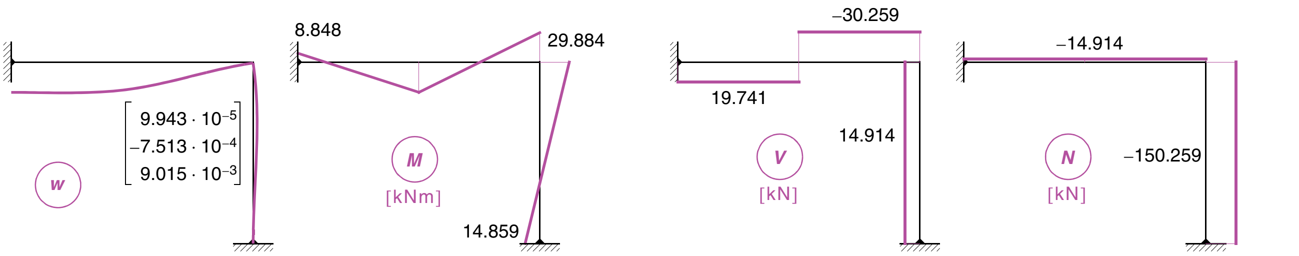
$$\begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 1111{,}1 & -1666{,}7 & 0 & -1111{,}1 & -1666{,}7 \\ 0 & -1666{,}7 & 3333{,}3 & 0 & 1666{,}7 & 1666{,}7 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -1111{,}1 & 1666{,}7 & 0 & 1111{,}1 & 1666{,}7 \\ 0 & -1666{,}7 & 1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 & 3333{,}3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0007513 \\ 0{,}0000994 \\ 0{,}0090148 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150{,}2589 \\ -14{,}9142 \\ 29{,}8836 \\ -150{,}2589 \\ 14{,}9142 \\ 14{,}8590 \end{bmatrix}$$

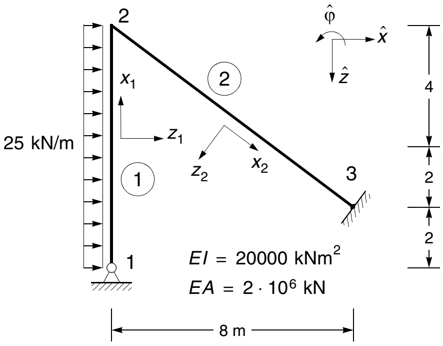
Ermittlung der Auflagereaktionen

Es werden die Zeilen des Gesamtgleichungssystems, die aufgrund der Randbedingungen gestrichen wurden, mit dem Vektor der globalen Verformungen multipliziert. In diesem Fall sind dies die Zeilen 1 bis 3 sowie 7 bis 10 des nicht reduzierten Gesamtgleichungssystems. Der Vektor der Verformungen wird um den Wert der eingeprägten Auflagerverschiebung ergänzt.

$$\begin{bmatrix} 150000 & 0 & 0 & -150000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 468{,}8 & -937{,}5 & 0 & -468{,}8 & -937{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -937{,}5 & 2500 & 0 & 937{,}5 & 1250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 & 1111{,}1 & 0 & -1666{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1666{,}7 & 0 & 1666{,}7 & -1666{,}7 & 0 & 3333{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}03 \\ 0 \\ -0{,}0000994 \\ 0{,}0007513 \\ 0{,}0090148 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}9142 \\ -19{,}7411 \\ 8{,}8478 \\ -14{,}9142 \\ -150{,}2590 \\ 14{,}8590 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 2.6



Stab 1

- Lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{k}^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\ 0 & 468{,}8 & -1875 & 0 & -468{,}8 & -1875 \\ 0 & -1875 & 10000 & 0 & 1875 & 5000 \\ \hline -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\ 0 & -468{,}8 & 1875 & 0 & 468{,}8 & 1875 \\ 0 & -1875 & 5000 & 0 & 1875 & 10000 \end{array}\right]$$

- Transformationsmatrix

Der Winkel α von der globalen zur lokalen x-Achse beträgt 90°. Mit $\sin\alpha = 1$ und $\cos\alpha = 0$ ergibt sich die Transformationsmatrix nach Gl. (2.5):

$$T^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Globale Steifigkeitsmatrix

Transformation nach Gl. (2.8):

$$\hat{k}^1 = T^{1^T} k^1 T^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 468{,}8 & 0 & -1875 & -468{,}8 & 0 & -1875 \\ 0 & 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 \\ -1875 & 0 & 10000 & 1875 & 0 & 5000 \\ \hline -468{,}8 & 0 & 1875 & 468{,}8 & 0 & 1875 \\ 0 & -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 \\ -1875 & 0 & 5000 & 1875 & 0 & 10000 \end{array}\right]$$

- Vektor der Stabendschnittgrößen infolge der Streckenlast

$$s^{10} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 133{,}333 \\ \hline 0 \\ -100 \\ -133{,}333 \end{array}\right]$$

Globale Stabendschnittgrößen durch Transformation:

$$\hat{s}^{10} = T^T s^{10} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ -100 \\ 133{,}333 \\ \hline 0 \\ -100 \\ -133{,}333 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -100 \\ 0 \\ 133{,}333 \\ \hline -100 \\ 0 \\ -133{,}333 \end{array}\right]$$

Stab 2

- Lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{k}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 240 & -1200 & 0 & -240 & -1200 \\ 0 & -1200 & 8000 & 0 & 1200 & 4000 \\ \hline -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -240 & 1200 & 0 & 240 & 1200 \\ 0 & -1200 & 4000 & 0 & 1200 & 8000 \end{array}\right]$$

- Transformationsmatrix

Der Winkel α von der globalen zur lokalen x-Achse beträgt −36.87°. Mit $\sin\alpha = -0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$ ergibt sich die Transformationsmatrix nach Gl. (2.5):

$$T^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Globale Steifigkeitsmatrix

Transformation nach Gl. (2.8):

$$\hat{k}^2 = T^{2^T} k^2 T^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 128086{,}4 & 95884{,}8 & 720 & -128086{,}4 & -95884{,}8 & 720 \\ 95884{,}8 & 72153{,}6 & -960 & -95884{,}8 & -72153{,}6 & -960 \\ 720 & -960 & 8000 & -720 & 960 & 4000 \\ \hline -128086{,}4 & -95884{,}8 & -720 & 128086{,}4 & 95884{,}8 & -720 \\ -95884{,}8 & -72153{,}6 & 960 & 95884{,}8 & 72153{,}6 & 960 \\ 720 & -960 & 4000 & -720 & 960 & 8000 \end{array}\right]$$

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Partitionierung der Elementmatrizen:

$$\hat{k}^1 = \begin{bmatrix} \hat{k}^1_{11} & \hat{k}^1_{12} \\ \hat{k}^1_{21} & \hat{k}^1_{22} \end{bmatrix} \qquad \hat{k}^2 = \begin{bmatrix} \hat{k}^2_{22} & \hat{k}^2_{23} \\ \hat{k}^2_{32} & \hat{k}^2_{33} \end{bmatrix}$$

Schematischer Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{k}_{ges} = \left[\begin{array}{ccc} \hat{k}^1_{11} & \hat{k}^1_{12} & \\ \hat{k}^1_{21} & \hat{k}^1_{22} + \hat{k}^2_{22} & \hat{k}^2_{23} \\ & \hat{k}^2_{32} & \hat{k}^2_{33} \end{array}\right]$$

Aufbau des Gesamtlastvektors

Der Elementlastvektor des Stabes 2 wird in den Zeilen 1 bis 6 in den Gesamtlastvektor addiert.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 133.333 \\ -100 \\ 0 \\ -133.333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufbau des Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix}
468,8 & 0 & -1875 & -468,8 & 0 & -1875 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1875 & 0 & 10000 & 1875 & 0 & 5000 & 0 & 0 & 0 \\
-468,8 & 0 & 1875 & 128555,2 & 95884,8 & 2595 & -128086,4 & -95884,8 & 720 \\
0 & -250000 & 0 & 95884,8 & 322153,6 & -960 & -95884,8 & -72153,6 & -960 \\
-1875 & 0 & 5000 & 2595 & -960 & 18000 & -720 & 960 & 4000 \\
0 & 0 & 0 & -128086,4 & -95884,8 & -720 & 128086,4 & 95884,8 & -720 \\
0 & 0 & 0 & -95884,8 & -72153,6 & 960 & 95884,8 & 72153,6 & 960 \\
0 & 0 & 0 & 720 & -960 & 4000 & -720 & 960 & 8000
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 133,333 \\ -100 \\ 0 \\ -133,333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Am Knoten 1 sind beide Verschiebungen, am Knoten 3 sind beide Verformungen gleich null. Die Zeilen und Spalten 1, 3 sowie 7 bis 9 können daher gestrichen werden. Damit ergibt sich das angegebene reduzierte Gleichungssystem.

Reduziertes Gleichungssystem nach Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix}
10000 & 1875 & 0 & 5000 \\
1875 & 128555,2 & 95884,8 & 2595 \\
0 & 95884,8 & 322153,6 & -960 \\
5000 & 2595 & -960 & 18000
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 133,333 \\ -100 \\ 0 \\ -133,333 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0199116 \\ 0,0010051 \\ -0,0002611 \\ 0,0127796 \end{bmatrix}$$

Ermittlung der Stabendschnittgrößen

Die Stabendschnittgrößen folgen aus Gl. (2.3) mit den bekannten Verformungen.

Stab 1

Globale Stabendverformungen:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0199116 \\ 0,0010051 \\ -0,0002611 \\ 0,0127796 \end{bmatrix}$$

Lokale Stabendverformungen durch Rücktransformation:

$$\boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{T}^1 \hat{\boldsymbol{w}}^1 = \begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0199116 \\ 0,0010051 \\ -0,0002611 \\ 0,0127796 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0199116 \\ 0,0002611 \\ 0,0010051 \\ 0,0127796 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{s}^0$$

$$\begin{bmatrix}
250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\
0 & 468,8 & -1875 & 0 & -468,8 & -1875 \\
0 & -1875 & 10000 & 0 & 1875 & 5000 \\
-250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\
0 & -468,8 & 1875 & 0 & 468,8 & 1875 \\
0 & -1875 & 5000 & 0 & 1875 & 10000
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0199116 \\ 0,0002611 \\ 0,0010051 \\ 0,0127796 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 133,33 \\ 0 \\ -100 \\ -133,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65,2631 \\ -87,0986 \\ 0 \\ 65,2631 \\ -112,9014 \\ -103,2109 \end{bmatrix}$$

Stab 2

Globale Stabendverformungen:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0010051 \\ -0,0002611 \\ 0,0127796 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lokale Stabendverformungen durch Rücktransformation:

$$\boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{T}^2 \hat{\boldsymbol{w}}^2$$

$$= \begin{bmatrix}
0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0,0010051 \\ -0,0002611 \\ 0,0127796 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0,0006474 \\ -0,0008119 \\ 0,0127796 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

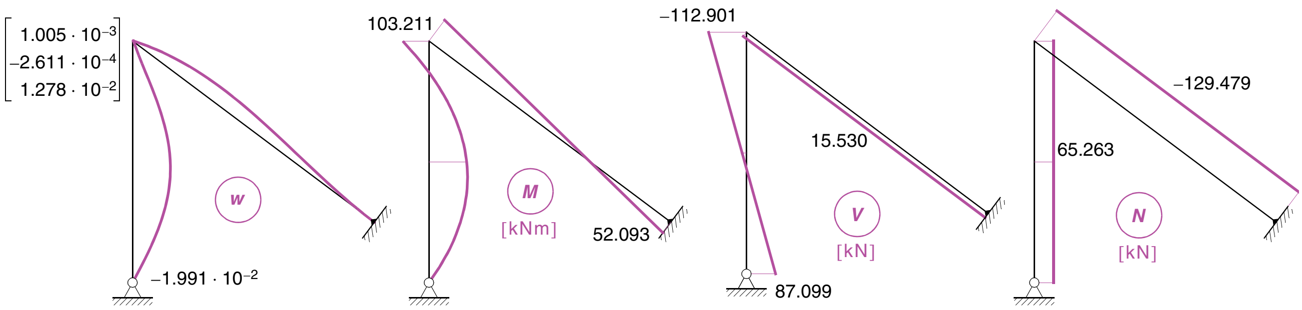
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w}$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\
0 & 240 & -1200 & 0 & -240 & -1200 \\
0 & -1200 & 8000 & 0 & 1200 & 4000 \\
\hline
-200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\
0 & -240 & 1200 & 0 & 240 & 1200 \\
0 & -1200 & 4000 & 0 & 1200 & 8000
\end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c}
0{,}0006474 \\ -0{,}0008119 \\ 0{,}0127796 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ \hline N_3 \\ V_3 \\ M_3
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
129{,}4789 \\ -15{,}5303 \\ 103{,}2109 \\ \hline -129{,}4789 \\ 15{,}5303 \\ 52{,}0926
\end{array}\right]
$$

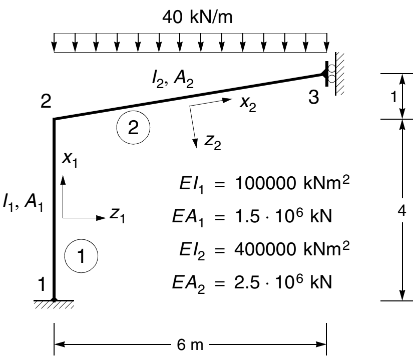
Ermittlung der Auflagereaktionen

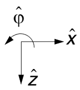
Es werden die Zeilen des Gesamtgleichungssystems, die aufgrund der Randbedingungen gestrichen wurden, mit dem Vektor der globalen Verformungen multipliziert. In diesem Fall sind dies die Zeilen 1 und 2 sowie 7 bis 9 des nicht reduzierten Gesamtgleichungssystems.

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
468{,}8 & 0 & -1875 & -468{,}8 & 0 & -1875 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -128086{,}4 & -95884{,}8 & -720 & 128086{,}4 & 95884{,}8 & -720 \\
0 & 0 & 0 & -95884{,}8 & -72153{,}6 & 960 & 95884{,}8 & 72153{,}6 & 960 \\
0 & 0 & 0 & 720 & -960 & 4000 & -720 & 960 & 8000
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
0 \\ \hline 0 \\ \hline -0{,}0199116 \\ \hline 0{,}0010051 \\ \hline -0{,}0002611 \\ \hline 0{,}0127796 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c}
-100 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
-87{,}0986 \\ \hline 65{,}2631 \\ \hline -112{,}9014 \\ \hline -65{,}2631 \\ \hline 52{,}0926
\end{array}\right]
$$



Aufgabe 2.7





Stab 1

- Lokale Steifigkeitsmatrix

$$
\hat{k}^1 =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
375000 & 0 & 0 & -375000 & 0 & 0 \\
0 & 18750 & -37500 & 0 & -18750 & -37500 \\
0 & -37500 & 100000 & 0 & 37500 & 50000 \\
\hline
-375000 & 0 & 0 & 375000 & 0 & 0 \\
0 & -18750 & 37500 & 0 & 18750 & 37500 \\
0 & -37500 & 50000 & 0 & 37500 & 100000
\end{array}\right]
$$

- Transformationsmatrix

Der Winkel α von der globalen zur lokalen x-Achse beträgt 90°. Mit $\sin\alpha = 1$ und $\cos\alpha = 0$ ergibt sich die Transformationsmatrix nach Gl. (2.5):

$$
T^1 =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

- Globale Steifigkeitsmatrix

Transformation nach Gl. (2.8):

$$\hat{k}^2 = T^{2^T} k^2 T^2$$

$$
\hat{k}^1 =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
18750 & 0 & -37500 & -18750 & 0 & -37500 \\
0 & 375000 & 0 & 0 & -375000 & 0 \\
-37500 & 0 & 100000 & 37500 & 0 & 50000 \\
\hline
-18750 & 0 & 37500 & 18750 & 0 & 37500 \\
0 & -375000 & 0 & 0 & 375000 & 0 \\
-37500 & 0 & 50000 & 37500 & 0 & 100000
\end{array}\right]
$$

Stab 2

- Lokale Steifigkeitsmatrix

$$
\hat{k}^2 =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
410997{,}5 & 0 & 0 & -410997{,}5 & 0 & 0 \\
0 & 21327{,}4 & -64864{,}9 & 0 & -21327{,}4 & -64864{,}9 \\
0 & -64864{,}9 & 263038{,}4 & 0 & 64864{,}9 & 131519{,}2 \\
\hline
-410997{,}5 & 0 & 0 & 410997{,}5 & 0 & 0 \\
0 & -21327{,}4 & 64864{,}9 & 0 & 21327{,}4 & 64864{,}9 \\
0 & -64864{,}9 & 131519{,}2 & 0 & 64864{,}9 & 263038{,}4
\end{array}\right]
$$

- Transformationsmatrix

Der Winkel α von der globalen zur lokalen x-Achse beträgt 9.462°. Mit $\sin\alpha$ = 0.1644 und $\cos\alpha$ = 0.9864 ergibt sich die Transformationsmatrix nach Gl. (2.5):

$$\boldsymbol{T}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Globale Steifigkeitsmatrix

Transformation nach Gl. (2.8):

$$\hat{\boldsymbol{k}}^2 = \boldsymbol{T}^{2^T} \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{T}^2$$

$$\hat{\boldsymbol{k}}^2 = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 400465{,}8 & -63189{,}7 & -10663{,}7 & -400465{,}8 & 63189{,}7 & -10663{,}7 \\ -63189{,}7 & 31859{,}1 & -63982{,}3 & 63189{,}7 & -31859{,}1 & -63982{,}3 \\ -10663{,}7 & -63982{,}3 & 263038{,}4 & 10663{,}7 & 63982{,}3 & 131519{,}2 \\ \hline -400465{,}8 & 63189{,}7 & 10663{,}7 & 400465{,}8 & -63189{,}7 & 10663{,}7 \\ 63189{,}7 & -31859{,}1 & 63982{,}3 & -63189{,}7 & 31859{,}1 & 63982{,}3 \\ -10663{,}7 & -63982{,}3 & 131519{,}2 & 10663{,}7 & 63982{,}3 & 263038{,}4 \end{array}\right]$$

- Globale Stabendschnittgrößen infolge der Streckenlast

In diesem Fall ist es vorteilhaft, die globalen Schnittgrößen aus der Projektionslänge des Stabes zu ermitteln.

$$|V| = \frac{40 \cdot 6}{2} = 120$$

$$|M| = \frac{40 \cdot 6^2}{12} = 120$$

$$\hat{\boldsymbol{s}}^{10} = \left[\begin{array}{r} 0 \\ -120 \\ 120 \\ \hline 0 \\ -120 \\ -120 \end{array}\right]$$

Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Partitionierung der Elementmatrizen:

$$\hat{\boldsymbol{k}}^1 = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}_{11}^1 & \hat{\boldsymbol{k}}_{12}^1 \\ \hat{\boldsymbol{k}}_{21}^1 & \hat{\boldsymbol{k}}_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{k}}^2 = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}_{22}^2 & \hat{\boldsymbol{k}}_{23}^2 \\ \hat{\boldsymbol{k}}_{32}^2 & \hat{\boldsymbol{k}}_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Schematischer Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\hat{\boldsymbol{k}}_{\text{ges}} = \left[\begin{array}{|c|c|c|} \hline \hat{\boldsymbol{k}}_{11}^1 & \hat{\boldsymbol{k}}_{12}^1 & \\ \hline \hat{\boldsymbol{k}}_{21}^1 & \hat{\boldsymbol{k}}_{22}^1 + \hat{\boldsymbol{k}}_{22}^2 & \hat{\boldsymbol{k}}_{23}^2 \\ \hline & \hat{\boldsymbol{k}}_{32}^2 & \hat{\boldsymbol{k}}_{33}^2 \\ \hline \end{array}\right]$$

Aufbau des Gesamtlastvektors

Der Elementlastvektor des Stabes 2 wird in den Zeilen 4 bis 9 in den Gesamtlastvektor addiert. Damit ergibt sich:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -120 \\ 120 \\ 0 \\ -120 \\ -120 \end{bmatrix}$$

Aufbau des Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} 18750 & 0 & -37500 & -18750 & 0 & -37500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 375000 & 0 & 0 & -375000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -37500 & 0 & 100000 & 37500 & 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 \\ -18750 & 0 & 37500 & 419215{,}8 & -63189{,}7 & 26836{,}3 & -400465{,}8 & 63189{,}7 & -10663{,}7 \\ 0 & -375000 & 0 & -63189{,}7 & 406859{,}1 & -63982{,}3 & 63189{,}7 & -31859{,}1 & -63982{,}3 \\ -37500 & 0 & 50000 & 26836{,}3 & -63982{,}3 & 363038{,}4 & 10663{,}7 & 63982{,}3 & 131519{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & -400465{,}8 & 63189{,}7 & 10663{,}7 & 400465{,}8 & -63189{,}7 & 10663{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 63189{,}7 & -31859{,}1 & 63982{,}3 & -63189{,}7 & 31859{,}1 & 63982{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & -10663{,}7 & -63982{,}3 & 131519{,}2 & 10663{,}7 & 63982{,}3 & 263038{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -120 \\ 120 \\ 0 \\ -120 \\ -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Am Knoten 1 sind alle Verformungen, am Knoten 3 ist die horizontale Verschiebung sowie die Drehung gleich null. Die Zeilen und Spalten 1, 2, 3 sowie 7 und 9 können daher gestrichen werden. Damit ergibt sich das angegebene reduzierte Gleichungssystem.

Reduziertes Gleichungssystem nach Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} 419215{,}8 & -63189{,}7 & 26836{,}3 & 63189{,}7 \\ -63189{,}7 & 406859{,}1 & -63982{,}3 & -31859{,}1 \\ 26836{,}3 & -63982{,}3 & 363038{,}4 & 63982{,}3 \\ 63189{,}7 & -31859{,}1 & 63982{,}3 & 31859{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 120 \\ -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \\ 0{,}0119316 \end{bmatrix}$$

Ermittlung der Stabendschnittgrößen

Die Stabendschnittgrößen folgen aus Gl. (2.3) mit den bekannten Verformungen.

Stab 1

Vektor der globalen Stabendverformungen

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \hline u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \end{bmatrix}$$

Lokale Stabendverformungen durch Rücktransformation:

$$\boldsymbol{w}^1 = \boldsymbol{T}^1 \hat{\boldsymbol{w}}^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0{,}0006401 \\ -0{,}0015608 \\ -0{,}0022052 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 375000 & 0 & 0 & -375000 & 0 & 0 \\ 0 & 18750 & -37500 & 0 & -18750 & -37500 \\ 0 & -37500 & 100000 & 0 & 37500 & 50000 \\ \hline -375000 & 0 & 0 & 375000 & 0 & 0 \\ 0 & -18750 & 37500 & 0 & 18750 & 37500 \\ 0 & -37500 & 50000 & 0 & 37500 & 100000 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0{,}0006401 \\ -0{,}0015608 \\ -0{,}0022052 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240{,}0258 \\ 111{,}9621 \\ -168{,}7934 \\ \hline -240{,}0258 \\ -111{,}9621 \\ -279{,}0551 \end{bmatrix}$$

Stab 2

Vektor der globalen Stabendverformungen

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \hline u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \\ \hline 0 \\ 0{,}0119316 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lokale Stabendschnittgrößen und Stabendverformungen durch Rücktransformation:

$$\boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{T}^2 \hat{\boldsymbol{s}}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ -120 \\ 120 \\ \hline 0 \\ -120 \\ -120 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} 19{,}7279 \\ -118{,}3673 \\ 120 \\ \hline 19{,}7279 \\ -118{,}3673 \\ -120 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{T}^2 \hat{\boldsymbol{w}}^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0{,}9864 & -0{,}1644 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1644 & 0{,}9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \\ \hline 0 \\ 0{,}0119316 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} -0{,}0016448 \\ 0{,}0003748 \\ -0{,}0022052 \\ \hline -0{,}0019616 \\ 0{,}0117694 \\ 0 \end{array}\right]$$

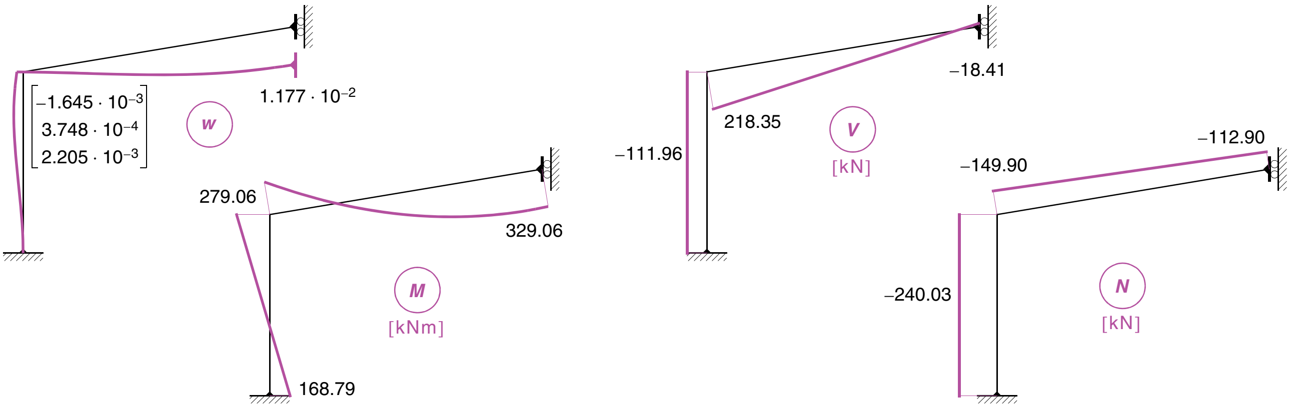
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{s}^0$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ \hline N_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 410997{,}5 & 0 & 0 & -410997{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 21327{,}4 & -64864{,}9 & 0 & -21327{,}4 & -64864{,}9 \\ 0 & -64864{,}9 & 263038{,}4 & 0 & 64864{,}9 & 131519{,}2 \\ \hline -410997{,}5 & 0 & 0 & 410997{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -21327{,}4 & 64864{,}9 & 0 & 21327{,}4 & 64864{,}9 \\ 0 & -64864{,}9 & 131519{,}2 & 0 & 64864{,}9 & 263038{,}4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} -0{,}0016448 \\ 0{,}0003748 \\ -0{,}0022052 \\ \hline -0{,}0019616 \\ 0{,}0117694 \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 19{,}7279 \\ -118{,}3673 \\ 120 \\ \hline 19{,}7279 \\ -118{,}3673 \\ -120 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 149{,}8988 \\ -218{,}3535 \\ 279{,}0551 \\ \hline -110{,}4388 \\ -18{,}4065 \\ 329{,}0602 \end{array}\right]$$

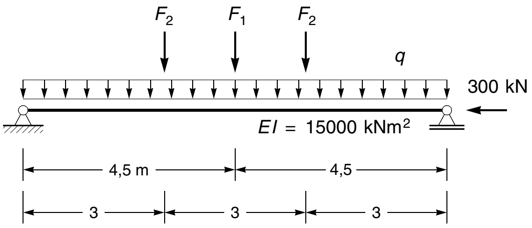
Ermittlung der Auflagereaktionen

Es werden die Zeilen des Gesamtgleichungssystems, die aufgrund der Randbedingungen gestrichen wurden, mit dem Vektor der globalen Verformungen multipliziert. In diesem Fall sind dies die Zeilen 1 bis 3 sowie 7 und 9 des nicht reduzierten Gesamtgleichungssystems.

$$
\begin{bmatrix}
18750 & 0 & -37500 & -18750 & 0 & -37500 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 375000 & 0 & 0 & -375000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-37500 & 0 & 100000 & 37500 & 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -400465{,}8 & 63189{,}7 & 10663{,}7 & 400465{,}8 & -63189{,}7 & 10663{,}7 \\
0 & 0 & 0 & -10663{,}7 & -63982{,}3 & 131519{,}2 & 10663{,}7 & 63982{,}3 & 263038{,}4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}0015608 \\ 0{,}0006401 \\ -0{,}0022052 \\ 0 \\ 0{,}0119316 \\ 0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -120
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
111{,}9621 \\ -240{,}0258 \\ -168{,}7934 \\ -111{,}9621 \\ 329{,}0602
\end{bmatrix}
$$



Aufgabe 3.1



Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\int EIw''\overline{w}''\mathrm{d}x + \int Hw'\overline{w}'\mathrm{d}x - \int q\overline{w}\mathrm{d}x - F\overline{w} = 0$$

Parabel

$$w(x) = Y\cdot(x^2 - 9x)$$
$$\overline{w} = x^2 - 9x$$

$$w'(x) = Y\cdot(2x - 9)$$
$$\overline{w}' = 2x - 9$$

$$w''(x) = 2Y$$
$$\overline{w}'' = 2$$

- Arbeit auf $\overline{w}$

$$EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x = Y\cdot 15000\cdot\int_0^9 2^2\mathrm{d}x = 540000\cdot Y$$

$$H\int w'\overline{w}'\mathrm{d}x = Y\cdot(-300)\cdot\int_0^9 (2x-9)^2\mathrm{d}x$$

$$= Y\cdot(-300)\cdot\int_0^9 (4x^2 - 36x + 81)\mathrm{d}x$$

$$= Y\cdot(-300)\cdot\left[\frac{4x^3}{3} - 18x^2 + 81x\right]_{x=0}^{9} = -72900\cdot Y$$

$$EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x + H\int w'\overline{w}'\mathrm{d}x = (540000 - 72900)\cdot Y$$

$$= 467100\cdot Y$$

➢ Lastfall 1

$$F_1\overline{w}(4.5) = 45\cdot(4.5^2 - 9\cdot 4.5) = -911.25$$

$$407100\cdot Y + 911.25 = 0 \Rightarrow Y = -0.0022383935$$

$$w(x) = -0.0022383935\cdot(x^2 - 9x)$$
$$w(3) = 0.040291083$$
$$w(4.5) = 0.045327469$$
$$w''(x) = 2\cdot(-0.0022383935) = -0.004476787$$
$$M = (-15000)\cdot(-0.004476787) = 67.151805$$

➢ Lastfall 2

$$F_2\overline{w}(3) = F_2\overline{w}(6) = 22.5\cdot 3^2 - 9\cdot 3 = -405$$

$$407100\cdot Y + 2\cdot 405 = 0 \Rightarrow Y = -0.0019896831$$

$$w(x) = -0.0019896831\cdot(x^2 - 9x)$$
$$w(3) = 0.035814296$$
$$w(4.5) = 0.040291083$$
$$w''(x) = 2\cdot(-0.0019896831) = -0.0039793662$$
$$M = (-15000)\cdot(-0.0039793662) = 59.690494$$

➢ Lastfall 3

$$\int q\overline{w}\mathrm{d}x = q\int (x^2 - 9x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^9 (x^2 - 9x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2}\right|_{x=0}^{9} = -121.5$$

$$407100\cdot Y + 5\cdot 121.5 = 0 \Rightarrow Y = -0.0014922623$$

$$
\begin{aligned}
w(x) &= -0.0014922623 \cdot (x^2 - 9x) \\
w(3) &= 0.026860722 \\
w(4.5) &= 0.030218312 \\
w''(x) &= 2 \cdot (-0.0014922623) = -0.0029845247 \\
M &= -15000 \cdot (-0.0029845247) = 44.76787
\end{aligned}
$$

Polynom 4. Ordnung

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Y \cdot (x^4 - 18x^3 + 729x) \\
\overline{w} &= x^4 - 18x^3 + 729x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w'(x) &= Y \cdot (4x^3 - 54x^2 + 729) \\
\overline{w}' &= 4x^3 - 54x^2 + 729
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w''(x) &= Y \cdot (12x^2 - 108x) \\
\overline{w}'' &= 12x^2 - 108x
\end{aligned}
$$

- Arbeit auf $\overline{w}$

$$EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x = Y \cdot 15000 \cdot \int_0^9 (12x^2 - 108x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^9 (12x^2 - 108x)^2\mathrm{d}x &= \int_0^9 (144x^4 - 2592x^3 + 11664x^2)\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{144x^5}{5} - 648x^4 + 3888x^3\right|_{x=0}^{9} = 283435.2
\end{aligned}
$$

$$H\int w\overline{w}'\mathrm{d}x = Y \cdot (-300) \cdot \int_0^9 (4x^3 - 54x^2 + 729)^2\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^9 (4x^3 - 54x^2 + 729)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^9 (16x^6 - 432x^5 + 5832x^3 + 2916x^4 - 78732x^2 + 531441)\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{16x^7}{7} - 72x^6 + 1458x^4 + \frac{2916x^5}{5} - 26244x^3 + 531441x\right|_{x=0}^{9} \\
&= 2323156.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x + H\int w'\overline{w}'\mathrm{d}x \\
&= (15000 \cdot 283435.2 - 300 \cdot 2323156.4) \cdot Y \\
&= 3.5545811 \cdot 10^9 \cdot Y
\end{aligned}
$$

- Lastfall 1

$$F_1\overline{w}(4.5) = 45 \cdot (4.5^4 - 18 \cdot 4.5^3 + 729 \cdot 4.5) = 92264.063$$

$$3.5545811 \cdot 10^9 \cdot Y - 92264.063 = 0 \Rightarrow Y = 0.25956381 \cdot 10^{-4}$$

$$
\begin{aligned}
w(x) &= 0.25956381 \cdot 10^{-4} \cdot (x^4 - 18x^3 + 729x) \\
w(3) &= 0.046254272 \\
w(4.5) &= 0.053218693 \\
w''(x) &= 0.25956381 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot 0.25956381 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
&= -0.38934572 \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(3) &= 84.098676 \\
M(4.5) &= 94.61101
\end{aligned}
$$

- Lastfall 2

$$F_2\overline{w}(3) = F_2\overline{w}(6) = 22.5 \cdot (3^4 - 18 \cdot 3^3 + 729 \cdot 3) = 40095$$

$$3.5545811 \cdot 10^9 \cdot Y - 2 \cdot 40095 = 0 \Rightarrow Y = 0.2255962 \cdot 10^{-4}$$

$$
\begin{aligned}
w(x) &= 0.2255962 \cdot 10^{-4} \cdot (x^4 - 18x^3 + 729x) \\
w(3) &= 0.040201244 \\
w(4.5) &= 0.046254272 \\
w''(x) &= 0.2255962 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot 0.2255962 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
&= -0.33839431 \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(3) &= 73.09317 \\
M(4.5) &= 82.229816
\end{aligned}
$$

- Lastfall 3

$$\int q\overline{w}\mathrm{d}x = q\int (x^4 - 18x^3 + 729x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^9 (x^4 - 18x^3 + 729x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^5}{5} - \frac{9x^4}{2} + \frac{729x^2}{2}\right|_{x=0}^{9} = 11809.8$$

$$3.5545811 \cdot 10^9 \cdot Y - 5 \cdot 11809.8 = 0 \Rightarrow Y = 0.16612084 \cdot 10^{-4}$$

$$
\begin{aligned}
w(x) &= 0.16612084 \cdot 10^{-4} \cdot (x^4 - 18x^3 + 729x) \\
w(3) &= 0.029602734 \\
w(4.5) &= 0.034059964 \\
w''(x) &= 0.16612084 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot 0.16612084 \cdot 10^{-4} \cdot (12x^2 - 108x) \\
&= -0.33839431 \cdot (12x^2 - 108x) \\
M(3) &= 53.823152 \\
M(4.5) &= 60.551047
\end{aligned}
$$

Sinus

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Y \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \\
\overline{w} &= \sin\frac{\pi}{9}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w'(x) &= Y \cdot \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x \\
\overline{w}' &= \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w''(x) &= -Y \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
\overline{w}'' &= -\frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x
\end{aligned}
$$

- Arbeit auf $\overline{w}$

$$EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x = Y \cdot 15000 \cdot \frac{\pi^4}{6561}\int_0^9 \sin^2\frac{\pi x}{9}\mathrm{d}x$$

$$H\int w\overline{w}'\mathrm{d}x = Y \cdot (-300) \cdot \frac{\pi^2}{81}\int_0^9 \cos^2\frac{\pi}{9}x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^9 \sin^2\frac{\pi x}{9}\mathrm{d}x = \int_0^9 \cos^2\frac{\pi x}{9}\mathrm{d}x = 4.5$$

$$
\begin{aligned}
EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x + H\int w'\overline{w}'\mathrm{d}x &= \left(15000 \cdot \frac{\pi^4}{6561}4.5 - 300 \cdot \frac{\pi^2}{81}4.5\right) \cdot Y \\
&= 837.65774 \cdot Y
\end{aligned}
$$

➢ Lastfall 1

$$F_1 \cdot \bar{w}(4.5) = 45 \cdot \sin\frac{\pi}{9}4.5 = 45$$

$$837.65774 \cdot Y - 45 = 0 \Rightarrow Y = 0.053721225$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= 0.053721225 \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \\
w(3) &= 0.046523946 \\
w(4.5) &= 0.053721225 \\
w''(x) &= -0.053721225 \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot (-0.053721225) \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
&= 98.186526\sin\frac{\pi}{9}x \\
M(3) &= 85.032026 \\
M(4.5) &= 98.186526
\end{aligned}$$

➢ Lastfall 2

$$F_2 \cdot \bar{w}(3) = F_2 \cdot \bar{w}(6) = 22.5\sin\frac{\pi}{9}3 = 19.485572$$

$$837.65774\,Y - 2 \cdot 19.485572 = 0 \Rightarrow Y = 0.046523946$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= 0.046523946 \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \\
w(3) &= 0.040290919 \\
w(4.5) &= 0.046523946 \\
w''(x) &= -0.046523946 \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot (-0.046523946) \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
&= 85.032026\sin\frac{\pi x}{9} \\
M(3) &= 73.639895 \\
M(4.5) &= 85.032026
\end{aligned}$$

➢ Lastfall 3

$$\int q\bar{w}\,dx = q\int_0^9 \sin\frac{\pi}{9}x\,dx$$

$$\int_0^9 \sin\frac{\pi}{9}x\,dx = \left[-\frac{9}{\pi}\cos\frac{\pi}{9}x\right]_0^9 = 5.729578$$

$$837.65774\,Y - 5 \cdot 5.729578 = 0 \Rightarrow Y = 0.034199994$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= 0.034199994 \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \\
w(3) &= 0.029618064 \\
w(4.5) &= 0.034199994 \\
w''(x) &= -0.034199994 \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
M(x) &= -EI \cdot w''(x) \\
&= -15000 \cdot (-0.034199994) \cdot \frac{\pi^2}{81}\sin\frac{\pi}{9}x \\
&= 62.507484\sin\frac{\pi x}{9} \\
M(3) &= 54.133069 \\
M(4.5) &= 62.507484
\end{aligned}$$

Gemischtes Verfahren

- Quadratische Parabel

$$\phi_2 = 4\xi - 4\xi^2$$

Die Berechnung erfolgt durch Anwendung von Gl. (3.52). Die Gleichung wird mit $3l$ multipliziert. Aus der Elementmatrix nach Gl. (3.53) verbleibt nur die mittlere Untermatrix:

$$\boldsymbol{g} \cdot 3l = \begin{bmatrix} \frac{80H + 8k_B l^2}{5} & 16 \\ 16 & -\frac{8l^2}{5EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80 \cdot (-300)}{5} & 16 \\ 16 & -\frac{8 \cdot 9^2}{5 \cdot 15000} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4800 & 16 \\ 16 & -0.00864 \end{bmatrix}$$

➢ Lastfall 1

$$F_1 \cdot \bar{w}(4.5) \cdot 3l = 45 \cdot \phi_2(0.5) \cdot 27 = 45 \cdot 1 \cdot 27 = 1215$$

➢ Lastfall 2

$$F_2 \cdot \bar{w}(3) \cdot 3l = F_2 \cdot \bar{w}(6) \cdot 3l$$
$$= 22.5 \cdot \phi_2(0.33333) \cdot 27 = 22.5 \cdot 0.88889 \cdot 27 = 540$$

$$F_2 \cdot \bar{w}(3) \cdot 3l + F_2 \cdot \bar{w}(6) \cdot 3l = 2 \cdot 540 = 1080$$

➢ Lastfall 3

Aus dem Lastvektor Gl. (3.48) verbleiben die beiden mittleren Werte:

$$27 \cdot \frac{5 \cdot 9}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 810 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Gleichungssystem und Lösung

$$\begin{bmatrix} -4800 & 16 \\ 16 & -0.00864 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1215 & 1080 & 810 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048933473 & 0.04349642 & 0.032622315 \\ 90.617542 & 80.548926 & 60.411695 \end{bmatrix}$$

Die Zustandsgrößen an der Stelle $x = 3$ folgen durch Multiplikation der Ergebnismatrix mit $\phi_2(0.33333) = 0.88889$.

$$\begin{bmatrix} 0.048933473 & 0.04349642 & 0.032622315 \\ 90.617542 & 80.548926 & 60.411695 \end{bmatrix} 0.88889$$

$$\begin{bmatrix} w \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04349642 & 0.038663484 & 0.028997613 \\ 80.548926 & 71.599045 & 53.699284 \end{bmatrix}$$

- Sinus

$$w(x) = Y \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \qquad \bar{w} = \sin\frac{\pi}{9}x$$

$$M(x) = X \cdot \sin\frac{\pi}{9}x \qquad \bar{M} = \sin\frac{\pi}{9}x$$

$$w'(x) = Y \cdot \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x \qquad \bar{w}' = \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x$$

$$M'(x) = X \cdot \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x \qquad \bar{M}' = \frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}x$$

1. Gleichgewichtsbedingung mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\int M'\bar{w}'dx + \int Hw'\bar{w}'dx - \int q\bar{w}\,dx - F\bar{w} = 0$$

$$\int M'\overline{w}'\mathrm{d}x = X \cdot \frac{\pi^2}{81}\int_0^9 \cos^2\frac{\pi}{9}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{81}4.5 \cdot X = 0.548311 \cdot X$$

$$\int Hw'\overline{w}'\mathrm{d}x = Y \cdot (-300) \cdot \frac{\pi^2}{81}\int_0^9 \cos^2\frac{\pi}{9}x\,\mathrm{d}x = -164.493 \cdot Y$$

$$\int M'\overline{w}'\mathrm{d}x + \int Hw'\overline{w}'\mathrm{d}x = 0.548311\,X - 164.493\,Y$$

2. Verträglichkeitsbedingung mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\int w'\overline{M}'\mathrm{d}x - \int \frac{M\overline{M}}{EI}\mathrm{d}x = 0$$

$$\int w'\overline{M}'\mathrm{d}x = Y \cdot \frac{\pi^2}{81}\int_0^9 \cos^2\frac{\pi}{9}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{81}4.5 \cdot Y = 0.54831 \cdot Y$$

$$\frac{1}{EI}\int M\overline{M}\,\mathrm{d}x = X \cdot \frac{1}{15000} \cdot \int_0^9 \sin^2\frac{\pi}{9}x\mathrm{d}x = 0.0003 \cdot X$$

$$\int w'\overline{M}'\mathrm{d}x - \int \frac{M\overline{M}}{EI}\mathrm{d}x = 0.54831 \cdot Y - 0.0003 \cdot X = 0$$

- Lastfall 1

$$F_1 \cdot \overline{w}(4.5) = 45 \cdot \sin\frac{\pi}{9}4.5 = 45$$

- Lastfall 2

$$2(22.5)\sin\frac{\pi}{9}3 = 38.971143$$

$$F_2 \cdot \overline{w}(3) = F_2 \cdot \overline{w}(6) = 22.5 \cdot \sin\frac{\pi}{9}3 = 19.4856$$

$$F_2 \cdot \overline{w}(3) + F_2 \cdot \overline{w}(6) = 2 \cdot 19.4856 = 38.9711$$

- Lastfall 3

$$q\int \overline{w}\,\mathrm{d}x = 5\int_0^9 \sin\frac{\pi}{9}x\mathrm{d}x = 5\left[-\frac{9}{\pi}\cos\frac{\pi}{9}x\right]_0^9 = 28.648$$

- Gleichungssystem und Lösung

$$\begin{bmatrix} 0.54831 & -164.493 \\ -0.0003 & 0.54831 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 45 & 38.9711 & 28.648 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

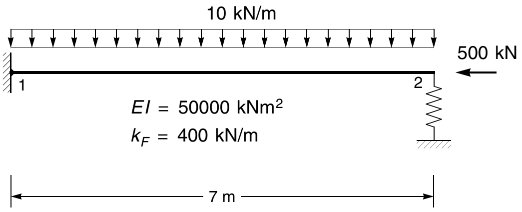
$$\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.187 & 85.032 & 62.507 \\ 0.05372 & 0.04652 & 0.03420 \end{bmatrix}$$

Die Zustandsgrößen an der Stelle $x = 3$ folgen durch Multiplikation der Ergebnismatrix mit $\sin\frac{\pi}{9}3$.

$$\begin{bmatrix} 98.187 & 85.032 & 62.507 \\ 0.05372 & 0.04652 & 0.03420 \end{bmatrix}\sin\frac{\pi}{9}3$$

$$= \begin{bmatrix} 85.032 & 73.640 & 54.133 \\ 0.04652 & 0.04029 & 0.02962 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.2



Prinzip der virtuellen Verschiebungen

- Parabel

$$w(x) = Y \cdot x^2$$
$$\overline{w} = x^2$$

$$w'(x) = Y \cdot 2x$$
$$\overline{w}' = 2x$$

$$w''(x) = 2Y$$
$$\overline{w}'' = 2$$

$$\int EIw''\overline{w}''\mathrm{d}x + \int Hw'\overline{w}'\mathrm{d}x + k_F w\overline{w} - q\int \overline{w}\,\mathrm{d}x = 0$$

- Arbeit auf $\overline{w}$

$$EI\int w''\overline{w}''\mathrm{d}x = Y \cdot 50000 \cdot \int_0^7 2^2\mathrm{d}x = 1400000\,Y$$

$$H\int w'\overline{w}'\mathrm{d}x = Y \cdot (-500) \cdot \int_0^7 (2x)^2\mathrm{d}x = -228666.67\,Y$$

$$k_F w\overline{w} = Y \cdot k_F \cdot w(7) \cdot \overline{w}(7) = Y \cdot 400 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 960400\,Y$$

$$q\int \overline{w}\,\mathrm{d}x = 10 \cdot \int_0^7 x^2\mathrm{d}x = 10 \cdot 114.33333 = 1143.3333$$

$$Y(1400000 - 228666.67 + 960400) - 1143.3333 = 0$$
$$2131733.3\,Y - 1143.3333 = 0$$
$$Y = \frac{1143.3333}{2131733.3} = 0.00053633975$$

$$w(x) = 0.00053633975 \cdot x^2$$
$$w(7) = 0.026280648$$

$$w'' = 0.00053633975 \cdot 2 = 0.0010726795$$
$$M = -50000 \cdot 0.0010726795 = -53.633975$$

- Hermite-Polynome

Die Berechnung erfolgt in schematisierter Form nach Abschnitt 3.1.3.4.

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1749.271 & -6122.449 & -1749.271 & -6122.449 \\ -6122.449 & 28571.429 & 6122.449 & 14285.714 \\ -1749.271 & 6122.449 & 1749.271 & 6122.449 \\ -6122.449 & 14285.714 & 6122.449 & 28571.429 \end{bmatrix}$$

$$\frac{H}{30}\begin{bmatrix} \frac{36}{l} & -3 & -\frac{36}{l} & -3 \\ -3 & 4l & 3 & -l \\ -\frac{36}{l} & 3 & \frac{36}{l} & 3 \\ -3 & -l & 3 & 4l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85.714 & 50 & 85.714 & 50 \\ 50 & -466.667 & -50 & 116.667 \\ 85.714 & -50 & -85.714 & -50 \\ 50 & 116.667 & -50 & -466.667 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 1749.271 & -6122.449 & -1749.271 & -6122.449 \\ -6122.449 & 28571.429 & 6122.449 & 14285.714 \\ -1749.271 & 6122.449 & 1749.271 & 6122.449 \\ -6122.449 & 14285.714 & 6122.449 & 28571.429 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} -85.714 & 50 & 85.714 & 50 \\ 50 & -466.667 & -50 & 116.667 \\ 85.714 & -50 & -85.714 & -50 \\ 50 & 116.667 & -50 & -466.667 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1663.557 & -6072.449 & -1663.557 & -6072.449 \\ -6072.449 & 28104.762 & 6072.449 & 14402.381 \\ -1663.557 & 6072.449 & 1663.557 & 6072.449 \\ -6072.449 & 14402.381 & 6072.449 & 28104.762 \end{bmatrix}
$$

Die Federsteifigkeit ist auf der Haupdiagonalen zu addieren.

$$
\begin{bmatrix} 1663.557 & -6072.449 & -1663.557 & -6072.449 \\ -6072.449 & 28104.762 & 6072.449 & 14402.381 \\ -1663.557 & 6072.449 & 1663.557+400 & 6072.449 \\ -6072.449 & 14402.381 & 6072.449 & 28104.762 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1663.557 & -6072.449 & -1663.557 & -6072.449 \\ -6072.449 & 28104.762 & 6072.449 & 14402.381 \\ -1663.557 & 6072.449 & 2063.557 & 6072.449 \\ -6072.449 & 14402.381 & 6072.449 & 28104.762 \end{bmatrix}
$$

- Lastvektor

$$
\frac{ql}{12}\begin{bmatrix} -6 \\ l \\ -6 \\ -l \end{bmatrix} = \frac{10\cdot 7}{12}\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 \\ 40.8333 \\ -35 \\ -40.8333 \end{bmatrix}
$$

- Berücksichtigung der Randbedingungen

Streichen der 1. und 2. Zeile und Spalte

$$
\begin{bmatrix} 2063.557 & 6072.449 \\ 6072.449 & 28104.762 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 \\ -40.8333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0348328 \\ -0.0060732 \end{bmatrix}
$$

- Ermittlung der Stabendschnittgrößen

$$
\begin{bmatrix} 1663.557 & -6072.449 & -1663.557 & -6072.449 \\ -6072.449 & 28104.762 & 6072.449 & 14402.381 \\ -1663.557 & 6072.449 & 1663.557 & 6072.449 \\ -6072.449 & 14402.381 & 6072.449 & 28104.762 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0348328 \\ -0.0060732 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 \\ 40.8333 \\ -35 \\ -40.8333 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56.067 \\ 164.885 \\ -13.933 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Gemischtes Verfahren, lineare Ansätze

Die Berechnung erfolgt durch Anwendung von Gl. (3.52). Die Gleichung wird mit $3l$ multipliziert.

$$
\boldsymbol{g}\cdot 3l = \begin{bmatrix} 3H + l^2 k_B & 3 & -3H + \dfrac{l^2 k_B}{2} & -3 \\ 3 & -\dfrac{l^2}{EI} & -3 & -\dfrac{l^2}{2EI} \\ -3H + \dfrac{l^2 k_B}{2} & -3 & 3H + l^2 k_B & 3 \\ -3 & -\dfrac{l^2}{2EI} & 3 & -\dfrac{l^2}{EI} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -1500 & 3 & 1500 & -3 \\ 3 & -0.00098 & -3 & -0.00049 \\ 1500 & -3 & -1500 & 3 \\ -3 & -0.00049 & 3 & -0.00098 \end{bmatrix}
$$

- Lastvektor nach Gl. (3.33):

$$
\boldsymbol{s}\cdot 3l = \frac{ql}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot 3l = \frac{10\cdot 7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot 21 = \begin{bmatrix} 735 \\ 0 \\ 735 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} -1500 & 3 & 1500 & -3 \\ 3 & -0.00098 & -3 & -0.00049 \\ 1500 & -3 & -1500 & 3 \\ -3 & -0.00049 & 3 & -0.00098 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ M_1 \\ w_2 \\ M_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 735 \\ 0 \\ 735 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

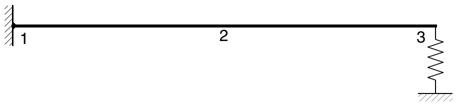
- Berücksichtigung der Randbedingungen

1. und 4. Zeile und Spalte werden gestrichen. Der $3l$-fache Wert der Federsteifigkeit ist auf der Hauptdiagonale der Freiheitsgrades w_2 zu addieren

$$
\begin{bmatrix} -0.00098 & -3 \\ -3 & 6900 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -139.893 \\ 0.04570 \end{bmatrix}
$$

Gemischtes Verfahren, quadratische Ansätze

Nummerierung der Knoten



$$
\boldsymbol{g}\cdot 3l = \begin{bmatrix} \dfrac{35H+2k_B l^2}{5} & 7 & \dfrac{-40H+k_B l^2}{5} & -8 & \dfrac{10H-k_B l^2}{10} & 1 \\ 7 & -\dfrac{2l^2}{5EI} & -8 & -\dfrac{l^2}{5EI} & 1 & \dfrac{l^2}{10EI} \\ \dfrac{-40H+k_B l^2}{5} & -8 & \dfrac{80H+8k_B l^2}{5} & 16 & \dfrac{-40H+k_B l^2}{5} & -8 \\ -8 & -\dfrac{l^2}{5EI} & 16 & -\dfrac{8l^2}{5EI} & -8 & -\dfrac{l^2}{5EI} \\ \dfrac{10H-k_B l^2}{10} & 1 & \dfrac{-40H+k_B l^2}{5} & -8 & \dfrac{35H+2k_B l^2}{5} & 7 \\ 1 & \dfrac{l^2}{10EI} & -8 & -\dfrac{l^2}{5EI} & 7 & -\dfrac{2l^2}{5EI} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -3500 & 7 & 4000 & -8 & -500 & 1 \\ 7 & -0.000392 & -8 & -0.000196 & 1 & 0.000098 \\ 4000 & -8 & -8000 & 16 & 4000 & -8 \\ -8 & -0.000196 & 16 & -0.001568 & -8 & -0.000196 \\ -500 & 1 & 4000 & -8 & -3500 & 7 \\ 1 & 0.000098 & -8 & -0.000196 & 7 & -0.000392 \end{bmatrix}
$$

- Lastvektor nach Gl. (3.48):

$$
\boldsymbol{s}\cdot 3l = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot 3l = \frac{10\cdot 7}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot 21 = \begin{bmatrix} 245 \\ 0 \\ 980 \\ 0 \\ 245 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

- Randbedingungen

1. und 6. Zeile und Spalte werden gestrichen. Der $3l$-fache Wert der Federsteifigkeit ist auf den Hauptdiagonalwert des Freiheitsgrades w_3 zu addieren.

$$
\begin{bmatrix} -0.000392 & -8 & -0.000196 & 1 \\ -8 & -8000 & 16 & 4000 \\ -0.000196 & 16 & -0.001568 & -8 \\ 1 & 4000 & -8 & 4900 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \\ M_2 \\ w_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 980 \\ 0 \\ 245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \\ M_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -165.2411 \\ 0.0130082 \\ -23.5359 \\ 0.0346778 \end{bmatrix}$$

- Elimination des Mittelknotens

$$\boldsymbol{g}_{22} = \begin{bmatrix} -8000 & 16 \\ 16 & -0.001568 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 6.440589 \cdot 10^{-6} & 0.06572029 \\ 0.06572029 & 32.860147 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{11} = \begin{bmatrix} -3500 & 7 \\ 7 & -0.000392 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 4000 & -8 \\ -8 & -0.000196 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{13} = \begin{bmatrix} -500 & 1 \\ 1 & 0.000098 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} -2000 & 4 \\ 4 & 0.0006195589 \end{bmatrix}$$

$$-\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 & 6.440589 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.53220294 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -6.440589 \cdot 10^{-5} & -0.5322029 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{33} = \boldsymbol{g}_{11} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} -1500 & 3 \\ 3 & -0.001011559 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{13} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{31} = \boldsymbol{g}_{13} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 1500 & -3 \\ -3 & -0.0005215589 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_1 = \boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 245 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -6.440589 \cdot 10^{-5} & -0.5322029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 980 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 735 \\ 0.06311777 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_3 = \boldsymbol{s}_3 - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 735 \\ 0.06311777 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} -1500 & 3 & 1500 & -3 \\ 3 & -0.001011559 & -3 & -0.0005215589 \\ 1500 & -3 & -1500 & 3 \\ -3 & -0.0005215589 & 3 & -0.001011559 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_3 = \begin{bmatrix} 735 \\ 0.06311777 \\ 735 \\ 0.06311777 \end{bmatrix}$$

- Randbedingungen

1. und 4. Zeile und Spalte werden gestrichen. Der $3l$-fache Wert der Federsteifigkeit ist auf den Hauptdiagonalwert des Freiheitsgrades w_3 zu addieren.

$$\begin{bmatrix} -0.001011559 & -3 \\ -3 & 6900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.06311777 \\ 735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -165.2411 \\ 0.0346778 \end{bmatrix}$$

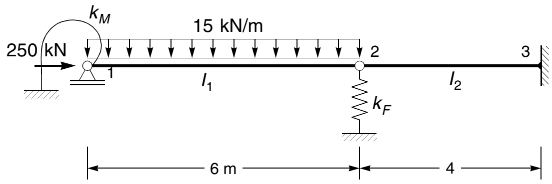
- Zustandsgrößen des Mittelknotens nach Gl. (3.55)

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3)$$

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.440589 \cdot 10^{-6} & 0.06572029 \\ 0.06572029 & 32.860147 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 980 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.5 & 6.440589 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.53220294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0346778 \\ -165.2411 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01300817 \\ -23.5359 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.3



$EI_1 = 12000$ kNm^2 $\qquad k_F = 800$ kN/m

$EI_2 = 4000$ kNm^2 $\qquad k_M = 4000$ kN/m

Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Hermite-Polynome

- Stab 1

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 666.6667 & -2000 & -666.6667 & -2000 \\ -2000 & 8000 & 2000 & 4000 \\ -666.6667 & 2000 & 666.6667 & 2000 \\ -2000 & 4000 & 2000 & 8000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{H}{30}\begin{bmatrix} \frac{36}{l} & -3 & -\frac{36}{l} & -3 \\ -3 & 4l & 3 & -l \\ -\frac{36}{l} & 3 & \frac{36}{l} & 3 \\ -3 & -l & 3 & 4l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & 25 & 50 & 25 \\ 25 & -200 & -25 & 50 \\ 50 & -25 & -50 & -25 \\ 25 & 50 & -25 & -200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 666.6667 & -2000 & -666.6667 & -2000 \\ -2000 & 8000 & 2000 & 4000 \\ -666.6667 & 2000 & 666.6667 & 2000 \\ -2000 & 4000 & 2000 & 8000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -50 & 25 & 50 & 25 \\ 25 & -200 & -25 & 50 \\ 50 & -25 & -50 & -25 \\ 25 & 50 & -25 & -200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 616.6667 & -1975 & -616.6667 & -1975 \\ -1975 & 7800 & 1975 & 4050 \\ -616.6667 & 1975 & 616.6667 & 1975 \\ -1975 & 4050 & 1975 & 7800 \end{bmatrix}$$

Lastvektor:

$$\frac{ql}{12}\begin{bmatrix} -6 \\ l \\ -6 \\ -l \end{bmatrix} = \frac{15 \cdot 6}{12}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ -45 \\ -45 \end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 & -1500 & -750 & -1500 \\ -1500 & 4000 & 1500 & 2000 \\ -750 & 1500 & 750 & 1500 \\ -1500 & 2000 & 1500 & 4000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{H}{30}\begin{bmatrix} \frac{36}{l} & -3 & -\frac{36}{l} & -3 \\ -3 & 4l & 3 & -l \\ -\frac{36}{l} & 3 & \frac{36}{l} & 3 \\ -3 & -l & 3 & 4l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 & 25 & 75 & 25 \\ 25 & -133.333 & -25 & 33.3333 \\ 75 & -25 & -75 & -25 \\ 25 & 33.3333 & -25 & -133.3333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 750 & -1500 & -750 & -1500 \\ -1500 & 4000 & 1500 & 2000 \\ -750 & 1500 & 750 & 1500 \\ -1500 & 2000 & 1500 & 4000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -75 & 25 & 75 & 25 \\ 25 & -133.3333 & -25 & 33.3333 \\ 75 & -25 & -75 & -25 \\ 25 & 33.3333 & -25 & -133.3333 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 675 & -1475 & -675 & -1475 \\ -1475 & 3866.6667 & 1475 & 2033.3333 \\ -675 & 1475 & 675 & 1475 \\ -1475 & 2033.3333 & 1475 & 3866.6667 \end{bmatrix}$$

- Gesamtsteifigkeitsmatrix

Aufgrund der Randbedingungen kann die 1. Zeile und Spalte der Steifigkeitsmatrix des Stabes 1 und die 3. und 4. Zeile und Spalte der Steifigkeitsmatrix des Stabes 2 gestrichen werden. In der Gesamtmatrix werden nur die Hauptdiagonalwerte des Freiheitsgrades w_2 addiert.

$$\begin{bmatrix} 7800 & 1975 & 4050 & 0 \\ 1975 & 616.66667+675 & 1975 & 0 \\ 4050 & 1975 & 7800 & -1475 \\ 0 & 0 & -1475 & 3866.6667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7800 & 1975 & 4050 & 0 \\ 1975 & 1291.6667 & 1975 & -1475 \\ 4050 & 1975 & 7800 & 0 \\ 0 & -1475 & 0 & 3866.6667 \end{bmatrix}$$

Die Federsteifigkeiten sind auf der Hauptdiagonalen der Freiheitsgrade φ_1 und w_2 zu addieren.

$$\begin{bmatrix} 7800+4000 & 1975 & 4050 & 0 \\ 1975 & 1291.6667+800 & 1975 & -1475 \\ 4050 & 1975 & 7800 & 0 \\ 0 & -1475 & 0 & 3866.6667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11800 & 1975 & 4050 & 0 \\ 1975 & 2091.6667 & 1975 & -1475 \\ 4050 & 1975 & 7800 & 0 \\ 0 & -1475 & 0 & 3866.6667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11800 & 1975 & 4050 & 0 \\ 1975 & 2091.6667 & 1975 & -1475 \\ 4050 & 1975 & 7800 & 0 \\ 0 & -1475 & 0 & 3866.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_{2,l} \\ \varphi_{2,r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45 \\ -45 \\ -45 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_1 \\ \varphi_{2,l} \\ \varphi_{2,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01126619 \\ 0.04305780 \\ 0.00071653 \\ 0.01642506 \end{bmatrix}$$

- Nachlaufrechnung

Stab 1:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 616.6667 & -1975 & -616.6667 & -1975 \\ -1975 & 7800 & 1975 & 4050 \\ -616.6667 & 1975 & 616.6667 & 1975 \\ -1975 & 4050 & 1975 & 7800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.01126619 \\ 0.04305780 \\ 0.00071653 \\ 0.01642506 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -45 \\ 45 \\ -45 \\ -45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -50.7167 \\ 45.0648 \\ -39.2833 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stab 2:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675 & -1475 & -675 & -1475 \\ -1475 & 3866.6667 & 1475 & 2033.3333 \\ -675 & 1475 & 675 & 1475 \\ -1475 & 2033.3333 & 1475 & 3866.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.04305780 \\ 0.01642506 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8370 \\ 0 \\ -4.8370 \\ -30.1126 \end{bmatrix}$$

Gemischtes Verfahren, lineare Ansätze

Die Berechnung erfolgt durch Anwendung von Gl. (3.52). Die Gleichung wird mit $3l_1 = 18$ multipliziert.

- Stab 1

$$\boldsymbol{g} \cdot 18 = \begin{bmatrix} \frac{18H}{l}+6lk_B & \frac{18}{l} & -\frac{18H}{l}-3lk_B & -\frac{18}{l} \\ \frac{18}{l} & -\frac{6l}{EI} & -\frac{18}{l} & -\frac{3l}{EI} \\ -\frac{18H}{l}+3lk_B & -\frac{18}{l} & \frac{18H}{l}+6lk_B & \frac{18}{l} \\ -\frac{18}{l} & -\frac{3l}{EI} & \frac{18}{l} & -\frac{6l}{EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -750 & 3 & 750 & -3 \\ 3 & -0.003 & -3 & -0.0015 \\ 750 & -3 & -750 & 3 \\ -3 & -0.0015 & 3 & -0.003 \end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\boldsymbol{g} \cdot 18 = \begin{bmatrix} \frac{18H}{l}+6lk_B & \frac{18}{l} & -\frac{18H}{l}-3lk_B & -\frac{18}{l} \\ \frac{18}{l} & -\frac{6l}{EI} & -\frac{18}{l} & -\frac{3l}{EI} \\ -\frac{18H}{l}+3lk_B & -\frac{18}{l} & \frac{18H}{l}+6lk_B & \frac{18}{l} \\ -\frac{18}{l} & -\frac{3l}{EI} & \frac{18}{l} & -\frac{6l}{EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1125 & 4.5 & 1125 & -4.5 \\ 4.5 & -0.006 & -4.5 & -0.003 \\ 1125 & -4.5 & -1125 & 4.5 \\ -4.5 & -0.003 & 4.5 & -0.006 \end{bmatrix}$$

- Schematischer Aufbau der Gesamtmatrix:

$$\boldsymbol{g}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{11}^1 & \boldsymbol{g}_{12}^1 & \\ \boldsymbol{g}_{21}^1 & \boldsymbol{g}_{22}^1+\boldsymbol{g}_{22}^2 & \boldsymbol{g}_{23}^2 \\ & \boldsymbol{g}_{32}^2 & \boldsymbol{g}_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -750 & 3 & 750 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -0.003-\frac{18}{4000} & -3 & -0.0015 & 0 & 0 \\ 750 & -3 & -750-1125+14400 & 3+4.5 & 1125 & -4.5 \\ -3 & -0.0015 & 3+4.5 & -0.003-0.006 & -3 & -0.003 \\ 0 & 0 & 1125 & -4.5 & -1125 & 4.5 \\ 0 & 0 & -4.5 & -0.003 & 4.5 & -0.006 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -750 & 3 & 750 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -0.0075 & -3 & -0.0015 & 0 & 0 \\ 750 & -3 & 12525 & 7.5 & 1125 & -4.5 \\ -3 & -0.0015 & 7.5 & -0.009 & -3 & -0.003 \\ 0 & 0 & 1125 & -4.5 & -1125 & 4.5 \\ 0 & 0 & -4.5 & -0.003 & 4.5 & -0.006 \end{bmatrix}$$

- Randbedingungen

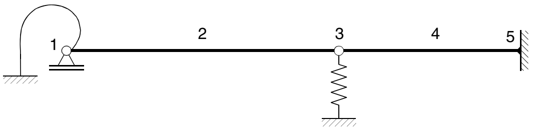
1., 4. und 5. Zeile und Spalte werden gestrichen. Der $3l$-fache Wert der Federsteifigkeit ist auf der Hauptdiagonale der Freiheitsgrades w_3 zu addieren

$$\begin{bmatrix} -0.0075 & -3 & 0 \\ -3 & 12525 & -4.5 \\ 0 & -4.5 & -0.006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \\ M_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 810 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ w_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.9474 \\ 0.04736842 \\ -35.5263 \end{bmatrix}$$

Gemischtes Verfahren, quadratische Ansätze

- Nummerierung der Knoten



- Stab 1

$$\mathbf{g}\cdot 18 = \begin{bmatrix} \frac{35H+2k_Bl^2}{5} & 7 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{10H-k_Bl^2}{10} & 1 \\ 7 & -\frac{2l^2}{5EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 1 & \frac{l^2}{10EI} \\ \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{80H+8k_Bl^2}{5} & 16 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 \\ -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 16 & -\frac{8l^2}{5EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} \\ \frac{10H-k_Bl^2}{10} & 1 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{35H+2k_Bl^2}{5} & 7 \\ 1 & \frac{l^2}{10EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 7 & -\frac{2l^2}{5EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1750 & 7 & 2000 & -8 & -250 & 1 \\ 7 & -0.0012 & -8 & -0.0006 & 1 & 0.0003 \\ 2000 & -8 & -4000 & 16 & 2000 & -8 \\ -8 & -0.0006 & 16 & -0.0048 & -8 & -0.0006 \\ -250 & 1 & 2000 & -8 & -1750 & 7 \\ 1 & 0.0003 & -8 & -0.0006 & 7 & -0.0012 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{22} = \begin{bmatrix} -4000 & 16 \\ 16 & -0.0048 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.027027\cdot 10^{-5} & 0.06756757 \\ 0.06756757 & 16.89189 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{11} = \begin{bmatrix} -1750 & 7 \\ 7 & -0.0012 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} 2000 & -8 \\ -8 & -0.0006 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_{13} = \begin{bmatrix} -250 & 1 \\ 1 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -1000 & 4 \\ 4 & 0.001952027 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.0002027027 \\ 0 & -0.5506757 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.0002027027 & -0.5506757 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{11} = \tilde{\mathbf{g}}_{33} = \mathbf{g}_{11} - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -750 & 3 \\ 3 & -0.003152027 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{13} = \tilde{\mathbf{g}}_{31} = \mathbf{g}_{13} - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} 750 & -3 \\ -3 & -0.001652027 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{11} & \tilde{\mathbf{g}}_{13} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{31} & \tilde{\mathbf{g}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -750 & 3 & 750 & -3 \\ 3 & -0.003152027 & -3 & -0.001652027 \\ 750 & -3 & -750 & 3 \\ -3 & -0.001652027 & 3 & -0.003152027 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = 18\cdot\frac{15\cdot 6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 0 \\ 1080 \\ 0 \\ 270 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{s}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 270 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.0002027027 & -0.5506757 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1080 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 810 \\ 0.2189189 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_3 = \mathbf{s}_3 - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 810 \\ 0.2189189 \end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\mathbf{g}\cdot 18 = 18\begin{bmatrix} \frac{35H+2k_Bl^2}{15l} & \frac{7}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{10H-k_Bl^2}{30l} & \frac{1}{3l} \\ \frac{7}{3l} & -\frac{2l}{15EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{1}{3l} & \frac{l}{30EI} \\ \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{80H+8k_Bl^2}{15l} & \frac{16}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} \\ -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{16}{3l} & -\frac{8l}{15EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} \\ \frac{10H-k_Bl^2}{30l} & \frac{1}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{35H+2k_Bl^2}{15l} & \frac{7}{3l} \\ \frac{1}{3l} & \frac{l}{30EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{7}{3l} & -\frac{2l}{15EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2625 & 10.5 & 3000 & -12 & -375 & 1.5 \\ 10.5 & -0.0024 & -12 & -0.0012 & 1.5 & 0.0006 \\ 3000 & -12 & -6000 & 24 & 3000 & -12 \\ -12 & -0.0012 & 24 & -0.0096 & -12 & -0.0012 \\ -375 & 1.5 & 3000 & -12 & -2625 & 10.5 \\ 1.5 & 0.0006 & -12 & -0.0012 & 10.5 & -0.0024 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{22} = \begin{bmatrix} -6000 & 24 \\ 24 & -0.0096 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.8518519\cdot 10^{-5} & 0.046296296 \\ 0.046296296 & 11.574074 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{11} = \begin{bmatrix} -2625 & 10.5 \\ 10.5 & -0.0024 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} 3000 & -12 \\ -12 & -0.0012 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_{13} = \begin{bmatrix} -375 & 1.5 \\ 1.5 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -1500 & 6 \\ 6 & 0.0040166667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.00027777778 \\ 0 & -0.56944444 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.00027777778 & -0.56944444 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{11} = \tilde{\mathbf{g}}_{33} = \mathbf{g}_{11} - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} -1125 & 4.5 \\ 4.5 & -0.0064166667 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{13} = \tilde{\mathbf{g}}_{31} = \mathbf{g}_{13} - \mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{22}^{-1}\mathbf{g}_{12} = \begin{bmatrix} 1125 & -4.5 \\ -4.5 & -0.0034166667 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{11} & \tilde{\mathbf{g}}_{13} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{31} & \tilde{\mathbf{g}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1125 & 4.5 & 1125 & -4.5 \\ 4.5 & -0.006416667 & -4.5 & -0.003416667 \\ 1125 & -4.5 & -1125 & 4.5 \\ -4.5 & -0.003416667 & 4.5 & -0.006416667 \end{bmatrix}$$

- Schematischer Aufbau der Gesamtmatrix

$$\mathbf{g}_{ges} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}^1_{11} & \tilde{\mathbf{g}}^1_{12} & \\ \tilde{\mathbf{g}}^1_{21} & \tilde{\mathbf{g}}^1_{22} + \tilde{\mathbf{g}}^2_{22} & \mathbf{g}^2_{23} \\ & \tilde{\mathbf{g}}^2_{32} & \tilde{\mathbf{g}}^2_{33} \end{bmatrix}$$

- Randbedingungen

1., 4. und 5. Zeile und Spalte werden gestrichen.

$$\begin{bmatrix} -0.003152027 & -3 & 0 \\ -3 & -750-1125 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & -0.006416667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.003152027 & -3 & 0 \\ -3 & -1875 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & -0.0064166667 \end{bmatrix}$$

Der 18 -fache Wert der Federsteifigkeit ist auf der Hauptdiagonale des Freiheitsgrades w_3 zu addieren. Der 18 -fache Reziprokwert der Drehfedersteifigkeit ist auf der Hauptdiagonale der Unbekannten M_1 zu addieren

$$\begin{bmatrix} -0.003152027-\frac{18}{4000} & -3 & 0 \\ -3 & -1875+18\cdot 800 & 4.5 \\ 0 & 4.5 & -0.006416667\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.007652027 & -3 & 0\\ -3 & 12525 & -4.5 \\ 0 & -4.5 & -0.006416667\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.007652027 & -3 & 0\\ -3 & 12525 & -4.5 \\ 0 & -4.5 & -0.006416667\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \\ M_5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.21891892 \\ 810 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \\ M_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45.4518 \\ 0.04295972 \\ -30.1276\end{bmatrix}$$

- Zustandsgrößen der Mittelknoten nach Gl. (3.55)

Stab 1:

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{g}_{22}^{-1}(\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3))$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3)$$

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ M_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2027027\cdot 10^{-4} & 0.067567568 \\ 0.067567568 & 16.891892\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1080 \\ 0\end{bmatrix}$$

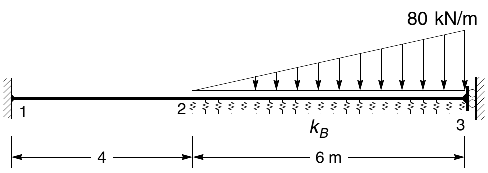
$$-\begin{bmatrix} -0.5 & -0.0002027027 \\ 0 & -0.55067568\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.042959723095 \\ -45.451759290\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.034158559 \\ 47.943795\end{bmatrix}$$

Stab 2:

$$\boldsymbol{z}_4 = -\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{z}_5)$$

$$\begin{bmatrix} w_4 \\ M_4\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.5 & -0.0002027027 \\ 0 & -0.55067568\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.042959723095 \\ -30.127597858\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015372916 \\ -16.590535\end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.4



$EI = 30000$ kNm²

$k_B = 12000$ kN/m²

Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Hermite-Polynome

- Stab 1

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5625 & -11250 & -5625 & -11250 \\ -11250 & 30000 & 11250 & 15000 \\ -5625 & 11250 & 5625 & 11250 \\ -11250 & 15000 & 11250 & 30000\end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1666.6667 & -5000 & -1666.6667 & -5000 \\ -5000 & 20000 & 5000 & 10000 \\ -1666.6667 & 5000 & 1666.6667 & 5000 \\ -5000 & 10000 & 5000 & 20000\end{bmatrix}$$

$$\frac{k_B l}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26742.857 & -22628.571 & 9257.1429 & 13371.429 \\ -22628.571 & 24685.714 & -13371.429 & -18514.286 \\ 9257.1429 & -13371.429 & 26742.857 & 22628.571 \\ 13371.429 & -18514.286 & 22628.571 & 24685.714\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1666.6667 & -5000 & -1666.6667 & -5000 \\ -5000 & 20000 & 5000 & 10000 \\ -1666.6667 & 5000 & 1666.6667 & 5000 \\ -5000 & 10000 & 5000 & 20000\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 26742.857 & -22628.571 & 9257.1429 & 13371.429 \\ -22628.571 & 24685.714 & -13371.429 & -18514.286 \\ 9257.1429 & -13371.429 & 26742.857 & 22628.571 \\ 13371.429 & -18514.286 & 22628.571 & 24685.714\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28409.524 & -27628.571 & 7590.4762 & 8371.4286 \\ -27628.571 & 44685.714 & -8371.4286 & -8514.2857 \\ 7590.4762 & -8371.4286 & 28409.524 & 27628.571 \\ 8371.4286 & -8514.2857 & 27628.571 & 44685.714\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.15\,ql \\ \frac{ql^2}{30} \\ -0.35\,ql \\ -\frac{ql^2}{20}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 \\ 96 \\ -168 \\ -144\end{bmatrix}$$

- Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 5625+28409.524 & 11250-27628.571 & 7590.4762 \\ 11250-27628.571 & 30000+44685.714 & -8371.4286 \\ 7590.4762 & -8371.4286 & 28409.524\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -72 \\ 96 \\ -168\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 34034.524 & -16378.571 & 7590.4762 \\ -16378.571 & 74685.714 & -8371.4286 \\ 7590.4762 & -8371.4286 & 28409.524\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -72 \\ 96 \\ -168\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000615958144 \\ -0.000523196289 \\ 0.005594767585\end{bmatrix}$$

- Nachlaufrechnung

$$\begin{bmatrix} 5625 & -11250 & -5625 & -11250 \\ -11250 & 30000 & 11250 & 15000 \\ -5625 & 11250 & 5625 & 11250 \\ -11250 & 15000 & 11250 & 30000\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000615958144 \\ -0.000523196289\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4211937 \\ -0.9184152 \\ -2.4211937 \\ -8.7663596\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28409.524 & -27628.571 & 7590.4762 & 8371.4286 \\ -27628.571 & 44685.714 & -8371.4286 & -8514.2857 \\ 7590.4762 & -8371.4286 & 28409.524 & 27628.571 \\ 8371.4286 & -8514.2857 & 27628.571 & 44685.714\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.000615958144 \\ -0.000523196289 \\ 0.005594767585 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} -72 \\ 96 \\ -168 \\ -144\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.421194 \\ -87.233641 \\ 168 \\ 164.18653\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -72 \\ 96 \\ -168 \\ -144\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4211938 \\ 8.7663593 \\ 0 \\ 20.186528\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3\end{bmatrix}$$

Gemischtes Verfahren, lineare Ansätze

Die Berechnung erfolgt durch Anwendung von Gl. (3.52). Die Gleichung wird mit $3l_2 = 18$ multipliziert.

- Stab 1

$$\boldsymbol{g}\cdot 18 = \frac{18}{l}\begin{bmatrix} H+\frac{k_B l^2}{3} & 1 & -H-\frac{k_B l^2}{6} & -1 \\ 1 & -\frac{l^2}{3EI} & -1 & -\frac{l^2}{6EI} \\ -H+\frac{k_B l^2}{6} & -1 & H+\frac{k_B l^2}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{l^2}{6EI} & 1 & -\frac{l^2}{3EI}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.5 & 0 & -4.5 \\ 4.5 & -0.0008 & -4.5 & -0.0004 \\ 0 & -4.5 & 0 & 4.5 \\ -4.5 & -0.0004 & 4.5 & -0.0008\end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\boldsymbol{g}\cdot 18 = \frac{18}{l}\begin{bmatrix} H+\frac{k_Bl^2}{3} & 1 & -H-\frac{k_Bl^2}{6} & -1 \\ 1 & -\frac{l^2}{3EI} & -1 & -\frac{l^2}{6EI} \\ -H+\frac{k_Bl^2}{6} & -1 & H+\frac{k_Bl^2}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{l^2}{6EI} & 1 & -\frac{l^2}{3EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 432000 & 3 & 216000 & -3 \\ 3 & -0.0012 & -3 & -0.0006 \\ 216000 & -3 & 432000 & 3 \\ -3 & -0.0006 & 3 & -0.0012 \end{bmatrix}$$

Lastvektor nach Gl. (3.33):

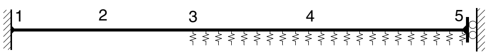
$$\boldsymbol{s}\cdot 18 = 18\cdot\frac{80\cdot 6}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1440\\0\\2880\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0008 & -4.5 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -4.5 & 432000 & 7.5 & 216000 & -3 \\ -0.0004 & 7.5 & -0.002 & -3 & -0.0006 \\ 0 & 216000 & -3 & 432000 & 3 \\ 0 & -3 & -0.0006 & 3 & -0.0012 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\w_2\\M_2\\w_3\\M_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1440\\0\\2880\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}M_1\\w_2\\M_2\\w_3\\M_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.739039666\\0.00068290419856\\-13.160751566\\0.0060941776850\\20.108559499\end{bmatrix}$$

Gemischtes Verfahren, quadratische Ansätze

- Nummerierung der Knoten



- Stab 1

$$\boldsymbol{g}\cdot 18 = 18\begin{bmatrix} \frac{35H+2k_Bl^2}{15l} & \frac{7}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{10H-k_Bl^2}{30l} & \frac{1}{3l} \\ \frac{7}{3l} & -\frac{2l}{15EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{1}{3l} & \frac{l}{30EI} \\ \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{80H+8k_Bl^2}{15l} & \frac{16}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} \\ -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{16}{3l} & -\frac{8l}{15EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} \\ \frac{10H-k_Bl^2}{30l} & \frac{1}{3l} & \frac{-40H+k_Bl^2}{15l} & -\frac{8}{3l} & \frac{35H+2k_Bl^2}{15l} & \frac{7}{3l} \\ \frac{1}{3l} & \frac{l}{30EI} & -\frac{8}{3l} & -\frac{l}{15EI} & \frac{7}{3l} & -\frac{2l}{15EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10.5 & 0 & -12 & 0 & 1.5 \\ 10.5 & -0.00032 & -12 & -0.00016 & 1.5 & 0.8\cdot 10^{-4} \\ 0 & -12 & 0 & 24 & 0 & -12 \\ -12 & -0.00016 & 24 & -0.00128 & -12 & -0.00016 \\ 0 & 1.5 & 0 & -12 & 0 & 10.5 \\ 1.5 & 0.8\cdot 10^{-4} & -12 & -0.00016 & 10.5 & -0.00032 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & -0.00128 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.22222222\cdot 10^{-5} & 0.041666667 \\ 0.041666667 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 10.5 \\ 10.5 & -0.00032 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -0.00016 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 1.5 & 8\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0.00048 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} -0.5 & -3.3333333\cdot 10^{-5} \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -3.3333333\cdot 10^{-5} & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{33} = \boldsymbol{g}_{11} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4.5 \\ 4.5 & -0.0008 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{13} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{31} = \boldsymbol{g}_{13} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -4.5 \\ -4.5 & -0.0004 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{13} \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{31} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.5 & 0 & -4.5 \\ 4.5 & -0.0008 & -4.5 & -0.0004 \\ 0 & -4.5 & 0 & 4.5 \\ -4.5 & -0.0004 & 4.5 & -0.0008 \end{bmatrix}$$

- Stab 2

$$\boldsymbol{g}\cdot 18 = \begin{bmatrix} \frac{35H+2k_Bl^2}{5} & 7 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{10H-k_Bl^2}{10} & 1 \\ 7 & -\frac{2l^2}{5EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 1 & \frac{l^2}{10EI} \\ \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{80H+8k_Bl^2}{5} & 16 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 \\ -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 16 & -\frac{8l^2}{5EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} \\ \frac{10H-k_Bl^2}{10} & 1 & \frac{-40H+k_Bl^2}{5} & -8 & \frac{35H+2k_Bl^2}{5} & 7 \\ 1 & \frac{l^2}{10EI} & -8 & -\frac{l^2}{5EI} & 7 & -\frac{2l^2}{5EI} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 172800 & 7 & 86400 & -8 & -43200 & 1 \\ 7 & -0.00048 & -8 & -0.00024 & 1 & 0.00012 \\ 86400 & -8 & 691200 & 16 & 86400 & -8 \\ -8 & -0.00024 & 16 & -0.00192 & -8 & -0.00024 \\ -43200 & 1 & 86400 & -8 & 172800 & 7 \\ 1 & 0.00012 & -8 & -0.00024 & 7 & -0.00048 \end{bmatrix}$$

Lastvektor

$$q(\xi) = q\xi$$

$$\phi_1 = 1-3\xi+2\xi^2$$

$$\phi_2 = 4\xi-4\xi^2$$

$$\phi_3 = -\xi+2\xi^2$$

$$\boldsymbol{s} = \int q\xi\begin{bmatrix} 1-3\xi+2\xi^2 \\ 4\xi-4\xi^2 \\ -\xi+2\xi^2 \end{bmatrix} l\,\mathrm{d}\xi = ql\int\begin{bmatrix} -3\xi^2+2\xi^3+\xi \\ 4\xi^2-4\xi^3 \\ -\xi^2+2\xi^3 \end{bmatrix}\mathrm{d}\xi = ql\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{22} = \begin{bmatrix} 691200 & 16 \\ 16 & -0.00192 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2128072\cdot 10^{-6} & 0.010106727 \\ 0.010106727 & -436.61061 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{11} = \begin{bmatrix} 172800 & 7 \\ 7 & -0.00048 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 86400 & -8 \\ -8 & -0.00024 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{13} = \begin{bmatrix} -43200 & 1 \\ 1 & 0.00012 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} -32861.061 & -1.2393273 \\ -1.2393273 & 9.1280724 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 0.02393273 & -1.2128072 \cdot 10^{-5} \\ 4366.1061 & 0.02393273 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02393273 & 4366.1061 \\ -1.2128072 \cdot 10^{-5} & 0.02393273 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{33} = \boldsymbol{g}_{11} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} 205661.06 & 8.2393273 \\ 8.2393273 & -0.00057128072 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{13} = \tilde{\boldsymbol{g}}_{31} = \boldsymbol{g}_{13} - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12} = \begin{bmatrix} -10338.939 & 2.2393273 \\ 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{13} \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{31} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 205661.06 & 8.2393273 & -10338.939 & 2.2393273 \\ 8.2393273 & -0.00057128072 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} \\ -10338.939 & 2.2393273 & 205661.06 & 8.2393273 \\ 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} & 8.2393273 & -0.00057128072 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} \cdot 18 = 18 \cdot \frac{80 \cdot 6}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2880 \\ 0 \\ 1440 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_1 = \boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02393273 & 4366.1061 \\ -1.2128072 \cdot 10^{-5} & 0.02393273 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2880 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -68.926261 \\ 0.034928849 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_3 = \boldsymbol{s}_3 - \boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1440 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02393273 & 4366.1061 \\ -1.2128072 \cdot 10^{-5} & 0.02393273 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2880 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1371.0737 \\ 0.034928849 \end{bmatrix}$$

- Aufbau des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{g}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_{11}^{1} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{12}^{1} & \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{21}^{1} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{22}^{1} + \tilde{\boldsymbol{g}}_{22}^{2} & \boldsymbol{g}_{23}^{2} \\ & \tilde{\boldsymbol{g}}_{32}^{2} & \tilde{\boldsymbol{g}}_{33}^{2} \end{bmatrix}$$

- Randbedingungen

Die 1. Zeile und Spalte wird gestrichen.

$$\begin{bmatrix} -0.0008 & -4.5 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -4.5 & 0 + 205661.06 & 4.5 + 8.2393273 & -10338.939 & 2.2393273 \\ -0.0004 & 4.5 + 8.2393273 & -0.0008 - 0.00057128072 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -10338.939 & 2.2393273 & 205661.06 & 8.2393273 \\ 0 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} & 8.2393273 & -0.00057128072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0008 & -4.5 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -4.5 & -205661.06 & 3.7393273 & -10338.939 & 2.2393273 \\ -0.0004 & 3.7393273 & -0.0013712807 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -10338.939 & 2.2393273 & 205661.06 & 8.2393273 \\ 0 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} & 8.2393273 & -0.00057128072 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0008 & -4.5 & -0.0004 & 0 & 0 \\ -4.5 & 205661.06 & 12.739327 & -10338.939 & 2.2393273 \\ -0.0004 & 12.739327 & -0.0013712807 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -10338.939 & 2.2393273 & 205661.06 & 8.2393273 \\ 0 & 2.2393273 & 2.8719276 \cdot 10^{-5} & 8.2393273 & -0.00057128072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \\ M_3 \\ w_5 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ -68.926261 \\ 0.034928849 \\ 1371.0737 \\ 0.034928849 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ w_3 \\ M_3 \\ w_5 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1297069904 \\ 0.000490520944 \\ -11.777774601 \\ 0.0058408582972 \\ 24.429464244 \end{bmatrix}$$

- Zustandsgrößen der Mittelknoten nach Gl. (3.55)

Stab 1

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{g}_{22}^{-1}(\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3))$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3)$$

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.027027 \cdot 10^{-5} & 0.067567568 \\ 0.067567568 & 16.891892 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1080 \\ 0 \end{bmatrix}$$

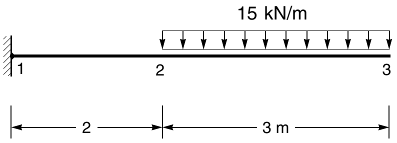
$$- \begin{bmatrix} -0.5 & -0.0002027027 \\ 0 & -0.55067568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.042959723095 \\ -45.451759290 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.034158559 \\ 47.943795 \end{bmatrix}$$

Stab 2

$$\boldsymbol{z}_2 = -\boldsymbol{g}_{22}^{-1}\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_3)$$

$$\begin{bmatrix} w_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.5 & -0.0002027027 \\ 0 & -0.55067568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.042959723095 \\ -30.127597858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015372916 \\ -16.590535 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4.1



$$\begin{bmatrix} -157{,}5 \\ 45 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

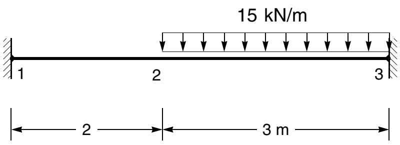
$$\boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -157{,}5 \\ 45 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1{,}333 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1{,}333 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 255 \\ -225 \\ -67{,}5 \\ 45 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_2$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4{,}5 & -4{,}5 & 50{,}625 \\ 0 & 1 & 3 & 4{,}5 & -67{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -67{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}5 & -20{,}833 & 50{,}625 \\ 5 & 12{,}5 & -67{,}5 \\ 1 & 5 & -67{,}5 \\ 0 & 1 & -45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1081{,}875 \\ -292{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -67{,}5 \\ 0 & 1 & -45 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4.2



$$\begin{bmatrix} -14{,}85 \\ 11{,}34 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

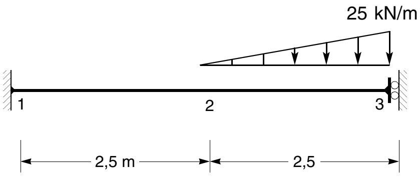
$$\boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14{,}85 \\ 11{,}34 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1{,}333 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1{,}333 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14{,}58 \\ -7{,}02 \\ 7{,}83 \\ 11{,}34 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_2$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4{,}5 & -4{,}5 & 50{,}625 \\ 0 & 1 & 3 & 4{,}5 & -67{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -67{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}5 & -20{,}833 & 50{,}625 \\ 5 & 12{,}5 & -67{,}5 \\ 1 & 5 & -67{,}5 \\ 0 & 1 & -45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25{,}65 \\ -33{,}66 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}5 & -20{,}833 & 50{,}625 \\ 5 & 12{,}5 & -67{,}5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4.3



$$\begin{bmatrix} -74{,}8698 \\ 31{,}25 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

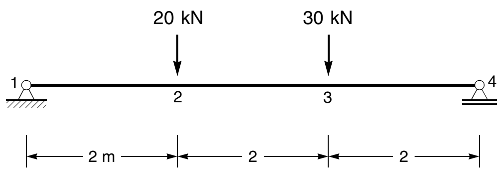
$$\boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -74{,}8698 \\ 31{,}25 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2 \begin{bmatrix} 1 & -2{,}5 & -3{,}125 & -2{,}6042 & 0 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 3{,}125 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3{,}125 & -2{,}604 & 0 \\ 2{,}5 & 3{,}125 & 0 \\ 1 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 152{,}5879 \\ -89{,}5182 \\ 3{,}2552 \\ 31{,}25 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_2$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -2{,}5 & -3{,}125 & -2{,}6042 & 8{,}1380 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 3{,}125 & -16{,}2760 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}5 & -26{,}0417 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -31{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}5 & -20{,}8333 & 8{,}1380 \\ 5 & 12{,}5 & -16{,}2760 \\ 1 & 5 & -26{,}0417 \\ 0 & 1 & -31{,}25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 292{,}9688 \\ 0 \\ 55{,}3385 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 12{,}5 & 16{,}2760 \\ 0 & 1 & 31{,}25 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4.4



$$\begin{bmatrix}-97{,}7778\\23{,}3333\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{R}_1\ \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-97{,}7778\\0\\23{,}3333\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2\begin{bmatrix}1&-2&-2&-1{,}3333&0\\0&1&2&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1{,}3333&0\\1&2&0\\0&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}164{,}4444\\-51{,}1111\\46{,}6667\\23{,}3333\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_{2,\,l}$$

$$\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-20\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1{,}3333&0\\1&2&0\\0&2&0\\0&1&-20\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}168{,}8889\\48{,}8889\\53{,}3333\\3{,}3333\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_{2,\,r}$$

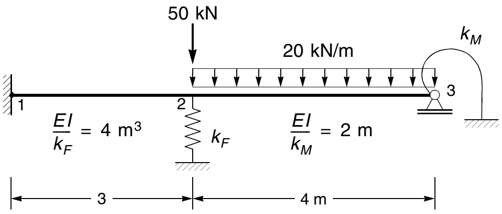
$$\boldsymbol{U}_2^3\begin{bmatrix}1&-2&-2&-1{,}3333&0\\0&1&2&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-10{,}6667&26{,}6667\\1&8&-40\\0&4&-40\\0&1&-20\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}168{,}8889\\48{,}8889\\53{,}3333\\-26{,}6667\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_{3,\,l}$$

$$\boldsymbol{P}_3\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-30\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-10{,}6667&26{,}6667\\1&8&-40\\0&4&-40\\0&1&-50\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\102{,}2222\\0\\-26{,}6667\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_{3,\,r}$$

$$\boldsymbol{U}_3^4\begin{bmatrix}1&-2&-2&-1{,}3333&0\\0&1&2&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&-36&253{,}3333\\1&18&-220\\0&6&-140\\0&1&-50\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\102{,}2222\\0\\-26{,}6667\\1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{z}_4$$

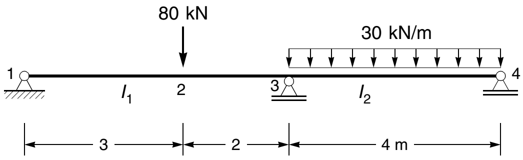
$$\boldsymbol{R}_4\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&-36&-253{,}3333\\0&6&140\end{bmatrix}$$

Aufgabe 4.5



									−67,7715	$\boldsymbol{x}_1$
									35,2873	
									1	
						0	0	0	0	
						0	0	0	0	
					$\boldsymbol{R}_1$	1	0	0	−67,7715	$\boldsymbol{z}_1$
						0	1	0	35,2873	
						0	0	1	1	
	1	−3	−4,5	−4,5	1	−4,5	−4,5	0	146,1788	
	0	1	3	4,5	0	3	4,5	0	−44,5216	
$\boldsymbol{U}_1^2$	0	0	1	3	0	1	3	0	38,0904	$\boldsymbol{z}_{2,l}$
	0	0	0	1	0	0	1	0	35,2873	
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
	1	0	0	0	0	−4,5	−4,5	0	146,1788	
	0	1	0	0	0	3	4,5	0	−44,5216	
$\boldsymbol{P}_2$	0	0	1	0	0	1	3	0	38,0904	$\boldsymbol{z}_{2,r}$
	0,25	0	0	1	−50	−1,125	−0,125	−50	21,8320	
	0	0	0	0	1	0	0	1	1	
	1	−4	−8	−10,6667	213,3333	−12,5	−45,1667	746,6667	0	
	0	1	4	8	−213,3333	−2	15,5	−613,3333	69,1630	
$\boldsymbol{U}_2^3$	0	0	1	4	−160	−3,5	2,5	−360	−34,5815	$\boldsymbol{z}_{3,l}$
	0	0	0	1	−80	−1,125	−0,125	−130	−58,1680	
	0	0	0	0	1	0	0	1	1	
	1	0	0	0	0	−12,5	−45,1667	746,6667	0	
	0	1	0	0	0	−2	15,5	−613,3333	69,1630	
$\boldsymbol{P}_3$	0	0,5	1	0	0	−4,5	10,25	−666,6667	0	$\boldsymbol{z}_{3,r}$
	0	0	0	1	0	−1,125	−0,125	−130	−58,1680	
	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
$\boldsymbol{R}_4$	1	0	0	0	0	−12,5	−45,1667	−746,6667		
	0	0	1	0	0	−4,5	10,25	666,6667		

Aufgabe 4.6



$\frac{l_1}{l_2} = 1.5$

- Mitführen der Unbekannten

$$\begin{bmatrix} -55{,}6364 \\ 18{,}4727 \\ 138{,}4364 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -55{,}6364 \\ 0 \\ 18{,}4727 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4{,}5 & -4{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}7818 \\ 27{,}4909 \\ 55{,}4182 \\ 18{,}4727 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{2,l}$$

$$\boldsymbol{P}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}7818 \\ 27{,}4909 \\ 55{,}4182 \\ -61{,}5273 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{2,l}$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1{,}3333 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15{,}2727 \\ -67{,}6364 \\ -61{,}5273 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{2,r}$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4{,}5 & -4{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -20{,}8333 & 0 & 106{,}6667 \\ 1 & 12{,}5 & 0 & -160 \\ 0 & 5 & 0 & -160 \\ 0 & 1 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15{,}2727 \\ -67{,}6364 \\ 76{,}9091 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{3,l}$$

neue Unbekannte: ΔV_3

$$\begin{bmatrix} -5 & -20{,}8333 & 0 & 106{,}6667 \\ 1 & 12{,}5 & 0 & -160 \\ 0 & 5 & 0 & -160 \\ 0 & 1 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 52{,}3636 \\ 0 \\ -43{,}0909 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{3,r}$$

$$\boldsymbol{U}_3^4 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -12 & -16 & 480 \\ 0 & 1 & 6 & 12 & -480 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -146{,}8333 & -16 & 4426{,}6667 \\ 1 & 54{,}5 & 12 & -2560 \\ 0 & 9 & 4 & -720 \\ 0 & 1 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 52{,}3636 \\ 0 \\ -43{,}0909 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -146{,}8333 & -16 & -4426{,}6667 \\ 0 & 9 & 4 & 720 \\ -5 & -20{,}8333 & 0 & -106{,}6667 \end{bmatrix}$$

- Ablösen der Unbekannten

$$\begin{bmatrix} -55{,}6364 \\ 18{,}4727 \\ 138{,}4364 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{R}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -55{,}6364 \\ 0 \\ 18{,}4727 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_1$$

$$\boldsymbol{U}_1^2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4{,}5 & -4{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}7818 \\ 27{,}4909 \\ 55{,}4182 \\ 18{,}4727 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{2,l}$$

$$\boldsymbol{P}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}7818 \\ 27{,}4909 \\ 55{,}4182 \\ -61{,}5273 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{2,r}$$

$$\boldsymbol{U}_2^3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1{,}3333 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -20{,}8333 & 106{,}6667 \\ 1 & 12{,}5 & -160 \\ 0 & 5 & -160 \\ 0 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15{,}2727 \\ -67{,}6364 \\ -61{,}5273 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{3,l}$$

$$\begin{bmatrix} -55{,}6364 \\ 138{,}4364 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2$$

neue Unbekannte: ΔV_3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -96 \\ -1{,}2 & 0 & -134{,}4 \\ -0{,}24 & 1 & -74{,}88 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15{,}2727 \\ -67{,}6364 \\ 76{,}9091 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_{3,r}$$

$$\boldsymbol{U}_3^4 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -12 & -16 & 480 \\ 0 & 1 & 6 & 12 & -480 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26{,}24 & -16 & 3674{,}88 \\ -12{,}08 & 12 & -2280{,}96 \\ -2{,}16 & 4 & -673{,}92 \\ -0{,}24 & 1 & -194{,}88 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 52{,}3636 \\ 0 \\ -43{,}0909 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}_3$$

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26{,}24 & -16 & 3674.88 \\ -2{,}16 & 4 & -673{,}92 \end{bmatrix}$$

Zwischenbedingung $w_2 = 0$ im Punkt 3:

$$w_2 = -5\varphi_1 - 20.8333\, V_1 + 106.66667 = 0$$

$$V_1 = \frac{-5\varphi_1}{20.8333} + \frac{106.66667}{20.8333} = -0.24\varphi_1 + 5.12$$

$$\boldsymbol{z}_{3,l} = \boldsymbol{U}_2^3 \cdot \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{Z}_1^{3,l} \cdot \boldsymbol{x}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -5\varphi_1 - 20.8333\, V_1 + 106.66667 \\ \varphi_1 + 12.5\, V_1 - 160 \\ 5\, V_1 - 160 \\ V_1 - 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\varphi_1 - 96 \\ -1.2\varphi_1 - 134.4 \\ -0.24\varphi_1 - 74.88 \end{bmatrix}$$

Einführung von ΔV_3:

$$\boldsymbol{z}_{3,r} = \boldsymbol{Z}_1^{3,r} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -96 \\ -1.2 & 0 & -134.4 \\ -0.24 & 1 & -74.88 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta V_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 26.24 & -16 \\ -2.16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3674.88 \\ -673.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.636364 \\ 138.43636 \end{bmatrix} \qquad V_1 = -0.24\varphi_1 + 5.12 = 18.472727$$